Programme de colles en Mathématiques
ECG 2 (semaine 2 : 23 septembre 2024)

La colle débutera soit par une démonstration d'un résultat de cours (indiqué par un astérisque), soit par un exercice de début de colle. *Pour cette colle, tous les résultats du cours sont admis.* Le programme portera sur les suites et les séries, ainsi que sur les limites et comparaison de fonctions, et plus particulièrement sur les points suivants:

(1) **Suites numériques (révisions):**
Suites croissantes, décroissantes, monotones, bornées.
Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques.
Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (cas où l'équation caractéristique a un discriminant positif).
Définition d'une suite convergente et de sa limite.
Définition d'une suite divergente et d'une suite qui tend vers l'infini.
"Toute suite convergente est bornée".
Opérations sur les suites et les limites : somme, produit, quotient, puissance, etc.
Théorème de la limite monotone - Théorème des gendarmes.
Théorème de passage à la limite dans les inégalités.
Définition des suites adjacentes - Théorème des suites adjacentes.
Règles de croissance comparée (comparaison des suites $(n!), (n^a), (q^n), (\ln(n)^b)$).
Définition et propriétés des suites négligeables et équivalentes - Opérations de base.
Suites équivalentes classiques - Recherche d'équivalents - Application au calcul des limites.

(2) **Séries numériques (révisions):**
Définition d'une série numérique, et de sa suite des sommes partielles.
Définition d'une série convergente, de sa somme et de son reste.
"Le reste d'une série convergente tend vers 0".
"Si une série converge, alors son terme général tend vers 0".
"Si deux séries diffèrent par un nombre fini de termes, alors elles sont de même nature".
Définition et propriétés des séries télescopiques.
Propriété de linéarité de la somme (en cas de convergence).
Propriétés des séries à termes positifs - Critères de comparaison et d'équivalence.
Définition d'une série absolument convergente.
"Toute série absolument convergente est convergente".
"Toute série absolument convergente reste absolument convergente et sa somme reste la même si l'on change l'ordre de sommation de ses termes".
Critère de négligeabilité des séries.
Définition et propriétés des séries de Riemann et de la série harmonique.
Définition et somme de la série exponentielle.
Définition de la série géométrique et de ses dérivées première et seconde.
Expression de leurs sommes (en cas de convergence).

(3) **Limites et comparaison de fonctions (révisions):**
Définition de la limite (finie ou infinie) en un réel a ou à l'infini.
Définition des limites à droite et à gauche en un réel a. Unicité de la limite.
Opérations algébriques sur les limites - Limite d'une fonction composée.
Compatibilité avec la relation d'ordre - Prolongement par continuité en un point.
Théorème de la limite monotone - Théorème des Gendarmes (encadrement).
"Si f admet une limite l en x_0 et si (u_n) tend vers x_0, alors $(f(u_n))$ tend vers l".
Définition d'une fonction négligeable devant une autre en un réel a, en l'infini.
Définition d'une fonction équivalente à une autre en un réel a, en l'infini.
Propriétés et opérations sur les négligeables et sur les équivalents.
Négligeables et équivalents classiques - Croissances comparées.
Application des négligeables et équivalents au calcul de limites.

<u>Exercices de début de colle</u>:

- Nature de l'une des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\ln^2(n)}{n^2} \quad , \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n2^n} \quad , \quad \sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n)}{n^2\sqrt{n}} \quad , \quad \sum_{n\geq 1} e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

- Convergence et somme de l'une des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+n} \quad , \quad \sum_{n\geq 0} \frac{n(n-1)}{3^n} \quad , \quad \sum_{n\geq 0} \frac{n^2+n+1}{n!} \quad , \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$