Lycée Clemenceau **2024-25**
ECG 2

Corrigé du Devoir Maison de Mathématiques $n^o 1$

Corrigé de l'exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \geq 0$ par $u_{n+1} = u_n + u_n^2$.

(1) Montrons que la suite (u_n) est strictement positive et monotone. Pour ce faire, on commence par remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = u_n + u_n^2 - u_n = u_n^2 \geq 0,$$

d'où il s'ensuit que (u_n) est croissante (et donc monotone). Mais comme $u_0 > 0$, on en déduit que $u_n \geq u_0 > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc (u_n) est strictement positive. Par conséquent :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est strictement positive et monotone (croissante).}}$$

(2) Montrons que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$. Comme cette suite est croissante, on sait d'après le cours que soit elle converge vers une limite finie l, soit elle tend vers $+\infty$. Montrons par l'absurde qu'elle tend vers $+\infty$. Pour ce faire, on suppose que (u_n) admet une limite finie l. Comme (u_{n+1}) tend aussi vers l et que $u_{n+1} = u_n + u_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient par passage à la limite que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = l = \lim_{n\to+\infty} u_n + u_n^2 = l + l^2,$$

d'où il s'ensuit que $l^2 = 0$, et donc $l = 0$. En outre, comme $u_n \geq u_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient par passage à la limite dans cette inégalité que $l \geq u_0$. Mais comme $u_0 > 0$, il s'ensuit que $l > 0$, ce qui contredit le fait que $l = 0$. Par conséquent :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ tend vers } +\infty.}$$

(3) Dans cette question, on se propose d'étudier le comportement asymptotique de (u_n). Pour ce faire, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = \frac{1}{2^n}\ln(u_n).$$

(a) Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).$$

Comme $u_{n+1} = u_n + u_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient que :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{2^{n+1}}\ln(u_{n+1}) - \frac{1}{2^n}\ln(u_n) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(u_n + u_n^2\right) - \frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(u_n^2\right) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(\frac{u_n + u_n^2}{u_n^2}\right). \end{aligned}$$

Dès lors, on en déduit après simplification que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).}$$

(b) Montrons que, pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leq \frac{1}{2^{n+p+1}}\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).$$

D'après la question précédente, on sait que, pour tous $n, p \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+p+1} - v_{n+p} = \frac{1}{2^{n+p+1}}\ln\left(1 + \frac{1}{u_{n+p+1}}\right).$$

Comme la suite (u_n) est strictement positive d'après la question (1), on sait que $0 < u_{n+p}$ pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, et donc $\frac{1}{u_{n+p}} > 0$, ce qui entraine (par stricte croissance de la fonction ln) que :

$$v_{n+p+1} - v_{n+p} = \frac{1}{2^{n+p+1}}\ln\left(1 + \frac{1}{u_{n+p+1}}\right) > \frac{1}{2^{n+p+1}}\ln(1 + 0) = 0.$$

De plus, comme (u_n) est croissante d'après la question (1), on voit que $0 < u_n \leq u_{n+p}$ pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, et donc $\frac{1}{u_{n+p}} \leq \frac{1}{u_n}$, ce qui entraine (par stricte croissance de la fonction ln) que :

$$v_{n+p+1} - v_{n+p} = \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_{n+p+1}}\right) \leq \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).$$

En mettant bout à bout ces inégalités, on en déduit que, pour tous $n, p \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leq \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).}$$

(c) Montrons que, pour tous $n, k \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 < v_{n+k+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).$$

D'après la question précédente, on sait que, pour tous $n, p \in \mathbb{N}$:

$$0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leq \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).$$

Fixons un entier $n \in \mathbb{N}$ quelconque. Par sommation sur p, on obtient que :

$$0 < \sum_{p=0}^{k} (v_{n+p+1} - v_{n+p}) \leq \sum_{p=0}^{k} \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).$$

On reconnait alors une somme télescopique dans l'expression du milieu de l'encadrement, ce qui nous donne après simplification que :

$$0 < v_{n+k+1} - v_n \leq \sum_{p=0}^{k} \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).$$

Par linéarité de la somme, on obtient que :

$$0 < v_{n+k+1} - v_n \leq \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \sum_{p=0}^{k} \frac{1}{2^{n+p+1}}.$$

On reconnait alors la somme des termes d'une suite géométrique dans l'expression de droite de l'encadrement, ce qui nous donne que :

$$0 < v_{n+k+1} - v_n \leq \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \times \frac{1}{2^{n+1}} \times \left(\frac{1 - \frac{1}{2^{k+1}}}{1 - \frac{1}{2}}\right).$$

Après simplification, il s'ensuit que, pour tous $n, k \in \mathbb{N}$:

$$0 < v_{n+k+1} - v_n \leq \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \frac{1}{2^n} \left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right).$$

Comme $0 < 1 - \frac{1}{2^{k+1}} \leq 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on en déduit que, pour tous $n, k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{0 < v_{n+k+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).}$$

(d) Montrons que la suite (v_n) est majorée, puis qu'elle converge vers une limite notée α. Si l'on remplace n par 0 dans l'encadrement de la question $(3)(c)$, alors on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$0 < v_{k+1} - v_0 \leq \frac{1}{2^0} \ln\left(1 + \frac{1}{u_0}\right),$$

ce qui nous donne après simplification l'encadrement suivant :

$$0 < v_{k+1} - v_0 \leq \ln\left(1 + \frac{1}{u_0}\right).$$

Comme cet encadrement est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$, on obtient que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$v_0 < v_k \leq v_0 + \ln\left(1 + \frac{1}{u_0}\right).$$

En particulier, on voit que la suite (v_n) est majorée. Mais comme $0 < v_{n+p+1} - v_{n+p}$ pour tous $n, p \in \mathbb{N}$ d'après la question $(3)(b)$, il s'ensuit en posant $p = 0$ que $v_{n+1} - v_n > 0$ pour tout

$n \in \mathbb{N}$, et donc la suite (v_n) est croissante. Comme elle est de plus majorée, on en déduit qu'elle est convergente. Par conséquent :

$$\boxed{(v_n) \text{ est majorée et converge vers une limite notée } \alpha.}$$

(e) Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \leq \exp(\alpha 2^n)$. Comme la suite (v_n) est croissante et converge vers α d'après la question précédente, on voit que $v_n \leq \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui entraine par définition de v_n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{2^n} \ln(u_n) \leq \alpha.$$

Dès lors, on obtient que $\ln(u_n) \leq \alpha 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mais comme la fonction ln est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{u_n \leq \exp(\alpha 2^n).}$$

(f) En passant à la limite pour n fixé dans l'encadrement de la question $(3)(c)$, montrons que :

$$\exp(\alpha 2^n) \leq u_n + 1.$$

Pour ce faire, rappelons que, d'après la question $(3)(c)$, on a pour tous $n, k \in \mathbb{N}$:

$$0 < v_{n+k+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).$$

Si l'on fixe l'entier n et que l'on fait tendre k vers $+\infty$, alors on obtient par passage à la limite dans l'inégalité de droite que :

$$\lim_{k \to +\infty} (v_{n+k+1} - v_n) \leq \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).$$

Comme la suite (v_n) converge vers α, il s'ensuit que v_{n+k+1} tend aussi vers α quand k tend vers $+\infty$, et donc on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\alpha - v_n \leq \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).$$

En utilisant la définition de v_n, on trouve alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\alpha - \frac{1}{2^n} \ln(u_n) \leq \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).$$

d'où il s'ensuit après calculs que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\alpha \leq \frac{1}{2^n} \ln(u_n) + \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) = \frac{1}{2^n} \ln\left(u_n\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)\right) = \frac{1}{2^n} \ln(u_n + 1).$$

Dès lors, on obtient que $\alpha 2^n \leq \ln(u_n + 1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mais comme la fonction ln est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\exp(\alpha 2^n) \leq u_n + 1.}$$

(g) Montrons qu'au voisinage de $+\infty$, on a : $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \exp(\alpha 2^n)$. D'après les questions $(3)(e)$ et $(3)(f)$, on voit que $u_n \leq \exp(\alpha 2^n)$ et $\exp(\alpha 2^n) - 1 \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc :

$$\exp(\alpha 2^n) - 1 \leq u_n \leq \exp(\alpha 2^n).$$

En divisant par $\exp(\alpha 2^n)$, on obtient que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$1 - \frac{1}{\exp(\alpha 2^n)} \leq \frac{u_n}{\exp(\alpha 2^n)} \leq 1.$$

Comme u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, et que $u_n \leq \exp(\alpha 2^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il s'ensuit que $\exp(\alpha 2^n)$ tend aussi vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ (et donc $\alpha > 0$). En particulier, le théorème des gendarmes appliqué à l'encadrement ci-dessus entraine que :

$$\frac{u_n}{\exp(\alpha 2^n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \exp(\alpha 2^n).}$$

(h) On pose $\beta_n = \exp(\alpha 2^n) - u_n$. Montrons d'abord que la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. D'après la question précédente, on sait que $u_n \leq \exp(\alpha 2^n)$ et $\exp(\alpha 2^n) - 1 \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui entraine que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\beta_n = \exp(\alpha 2^n) - u_n \geq 0 \quad \text{et} \quad \beta_n = \exp(\alpha 2^n) - u_n \leq 1.$$

En particulier, on voit que $0 \leq \beta_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc :

$$\boxed{\text{la suite } (\beta_n) \text{ est bornée.}}$$

A présent, montrons que (β_n) vérifie la relation suivante pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$2\beta_n - 1 = (\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n)\exp(-\alpha 2^n).$$

Par définition de β_n et comme $u_{n+1} = u_n + u_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
(\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n)e^{-\alpha 2^n} &= \left[e^{\alpha 2^{n+1}} - u_{n+1} + (e^{\alpha 2^n} - u_n)^2 - (e^{\alpha 2^n} - u_n)\right] e^{-\alpha 2^n} \\
&= \left[e^{\alpha 2^{n+1}} - u_{n+1} + (e^{\alpha 2^n})^2 + u_n^2 - 2u_n e^{\alpha 2^n} - e^{\alpha 2^n} + u_n\right] e^{-\alpha 2^n} \\
&= \left[e^{\alpha 2^{n+1}} - u_{n+1} + e^{\alpha 2^{n+1}} + u_n^2 - 2u_n e^{\alpha 2^n} - e^{\alpha 2^n} + u_n\right] e^{-\alpha 2^n} \\
&= \left[2e^{\alpha 2^{n+1}} - 2u_n e^{\alpha 2^n} - e^{\alpha 2^n}\right] e^{-\alpha 2^n} \\
&= 2e^{\alpha 2^{n+1}} e^{-\alpha 2^n} - 2u_n e^{\alpha 2^n} e^{-\alpha 2^n} - e^{\alpha 2^n} e^{-\alpha 2^n} \\
&= 2e^{\alpha(2^{n+1} - 2^n)} - 2u_n e^{\alpha(2^n - 2^n)} - e^{\alpha(2^n - 2^n)} \\
&= 2e^{\alpha 2^n} - 2u_n - 1 \\
&= 2(e^{\alpha 2^n} - u_n) - 1 \\
&= 2\beta_n - 1.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{2\beta_n - 1 = (\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n)\exp(-\alpha 2^n).}$$

(i) Montrons qu'au voisinage de $+\infty$, on a : $u_n = -\frac{1}{2} + \exp(\alpha 2^n) + o(1)$. Comme $0 \leq \beta_n \leq 1$ d'après la question $(3)(h)$, l'inégalité triangulaire entraine que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n| \leq |\beta_{n+1}| + |\beta_n|^2 + |\beta_n| \leq 1 + 1^2 + 1 = 3.$$

Dès lors, il s'ensuit avec la relation de la question $(3)(h)$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|2\beta_n - 1| = |(\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n)\exp(-\alpha 2^n)| \leq 3\exp(-\alpha 2^n).$$

d'où l'on déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq |2\beta_n - 1| \leq 3\exp(-\alpha 2^n).$$

Comme $\alpha > 0$ d'après les questions précédentes, on voit que $3\exp(-\alpha 2^n)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Dès lors, le théorème des gendarmes entraine que $|2\beta_n - 1|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et donc :

$$2\beta_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

d'où il s'ensuit que β_n tend vers $\frac{1}{2}$ quand n tend vers $+\infty$. Or ceci signifie exactement que la suite $\gamma_n = \beta_n - \frac{1}{2}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et donc qu'au voisinage de $+\infty$:

$$\beta_n = \exp(\alpha 2^n) - u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2} + o(1).$$

Par conséquent, on en déduit qu'au voisinage de $+\infty$:

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2} + \exp(\alpha 2^n) + o(1).}$$

Corrigé de l'exercice 2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par u_n la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$u_n(x) = \frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}.$$

(1) Justifions la convergence de la série de terme général $\frac{1}{n^{\alpha+1}}$ (on notera $f(\alpha) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$). Comme $\alpha > 0$, on voit que $\alpha + 1 > 1$. Dès lors, d'après le critère de convergence de Riemann, il s'ensuit que :

$$\boxed{\text{la série de Riemann } \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\alpha+1}} \text{ converge.}}$$

(2) Montrons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de terme général $u_n(x)$ est convergente. Pour ce faire, on va distinguer les cas "$x = 0$" et "$x \neq 0$". Tout d'abord, si $x = 0$, on voit que $u_n(0) = 0$ pour tout $n \in N^*$, et donc la série $\sum_{n\geq 1} u_n(0)$ converge comme série nulle. Si maintenant $x \neq 0$, alors on constate que $1 + nx^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} nx^2$, ce qui entraine que :

$$\frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x}{n^{\alpha+1}x^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\alpha+1}x}.$$

Comme la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$ converge d'après la question (1), on obtient par linéarité que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\alpha+1}x}$ converge. Dès lors, comme $\frac{1}{n^{\alpha+1}x}$ est du signe de x, il s'ensuit d'après le critère d'équivalence des séries à termes de signe constant que la série $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge. Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geq 1} u_n(x) \text{ converge.}}$$

Par la suite, on note pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x).$$

(3) (a) Montrons que la fonction S est impaire. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on voit que :

$$u_n(-x) = \frac{-x}{n^\alpha(1+n(-x)^2)} = \frac{-x}{n^\alpha(1+nx^2)} = -u_n(x).$$

Par sommation sur l'entier n et par linéarité de la somme, on trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$S(-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -u_n(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = -S(x).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } S \text{ est impaire.}}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, étudions les variations de la fonction u_n sur $\mathbb{R}$. Par définition, la fonction u_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$u_n'(x) = \frac{1 \times (1+nx^2) - x \times (2nx)}{n^\alpha(1+nx^2)^2} = \frac{1-nx^2}{n^\alpha(1+nx^2)^2}.$$

En particulier, on voit que $u_n'(x) \geq 0$ si et seulement si $1 - nx^2 \geq 0$, c'est-à-dire si $\frac{1}{n} \geq x^2$, ou en d'autres termes si $x \in [-\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}]$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{u_n \text{ est décroissante sur } \left]-\infty, \frac{1}{\sqrt{n}}\right[, \text{ croissante sur } \left[-\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right] \text{ et décroissante sur } \left]\frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty\right[.}$$

(c) Déterminons les variations de la fonction S sur $[1, +\infty[$, puis sur $]-\infty, -1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous $x, y \geq 1$ tels que $x \leq y$, on voit que $x, y \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$, et donc $u_n(x) \geq u_n(y)$ d'après la question (3)(b). Par sommation sur l'entier n, on trouve que, pour tous $x, y \geq 1$ tels que $x \leq y$:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(y) = S(y).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } S \text{ est décroissante sur } [1, +\infty[.}$$

Comme la fonction S est impaire sur $\mathbb{R}$ d'après la question $(3)(a)$, on en déduit aussi que :

$$\boxed{\text{la fonction } S \text{ est décroissante sur }]-\infty,-1].}$$

(4) (a) Montrer que, pour tout $x \geq 1$, on a :

$$\frac{x}{(1+x)^2} f(\alpha) \leq S(x) \leq \frac{1}{x} f(\alpha).$$

Partant de l'encadrement $0 < nx^2 \leq 1+nx^2 \leq n(1+x)^2$ valable pour tout $x \geq 1$ et pour tout $n \geq 1$, on obtient que, pour tout $x \geq 1$ et pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{1}{n(1+x)^2} \leq \frac{1}{1+nx^2} \leq \frac{1}{nx^2}.$$

Par produit, ceci nous donne que, pour tout $x \geq 1$ et pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{x}{n^{\alpha+1}(1+x)^2} \leq \frac{x}{n^{\alpha}(1+nx^2)} \leq \frac{1}{n^{\alpha+1}x}.$$

Comme les séries $\sum_{n\geq 1} \frac{x}{n^{\alpha+1}(1+x)^2}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\alpha+1}x}$ convergent comme multiples de séries de Riemann convergentes, et que la série $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge d'après la question (2), on trouve par sommation sur l'entier n que, pour tout $x \geq 1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^{\alpha+1}(1+x)^2} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^{\alpha}(1+nx^2)} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}x}.$$

Par linéarité de la somme, il s'ensuit que, pour tout $x \geq 1$:

$$\frac{x}{(1+x)^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^{\alpha}(1+nx^2)} \leq \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}}.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x \geq 1$:

$$\boxed{\frac{x}{(1+x)^2} f(\alpha) \leq S(x) \leq \frac{1}{x} f(\alpha).}$$

(b) Déterminons un équivalent de $S(x)$ et sa limite en $+\infty$. D'après la question précédente, on sait que, pour tout $x \geq 1$:

$$\frac{x}{(1+x)^2} f(\alpha) \leq S(x) \leq \frac{1}{x} f(\alpha).$$

Par produit, ceci nous donne que, pour tout $x \geq 1$:

$$\frac{x^2}{(1+x)^2} \leq \frac{xS(x)}{f(\alpha)} \leq 1.$$

Comme $(1+x^2) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$, on voit que le quotient $\frac{x^2}{(1+x)^2}$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$. D'après le théorème des gendarmes, il s'ensuit que :

$$\frac{xS(x)}{f(\alpha)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{f(\alpha)}{x}.}$$

Comme $\frac{1}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, on en déduit aussi que :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} S(x) = 0.}$$

(5) On suppose que $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

(a) Justifions tout d'abord que $S(x) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} u_k(x)$ pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \geq 0$. Par définition, comme $2n \geq n+1$ vu que $n \geq 1$, on peut séparer $S(x)$ en trois morceaux :

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) + \sum_{k=n+1}^{2n} u_k(x) + \sum_{k=2n+1}^{+\infty} u_k(x).$$

Comme $x \geq 0$, on voit que $u_k(x) = \frac{x}{k^\alpha(1+kx^2)} \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, et donc on obtient par sommation sur k que :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=2n+1}^{+\infty} u_k(x) \geq 0.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \geq 0$:

$$\boxed{S(x) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} u_k(x).}$$

A présent, montrons que, pour tout $n \geq 1$:

$$S\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) \geq \frac{n^{\frac{1}{2}-\alpha}}{2^{\alpha+\frac{3}{2}}}.$$

Si l'on remplace x par $\frac{1}{\sqrt{2n}}$ dans l'inégalité démontrée précédemment et si l'on part du fait que $k^\alpha(1+\frac{k}{2n}) \leq (2n)^\alpha(1+\frac{2n}{2n})$ pour tout $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, on trouve que, pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
S\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) &\geq \sum_{k=n+1}^{2n} u_k\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) \\
&\geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\frac{1}{\sqrt{2n}}}{k^\alpha(1+k(\frac{1}{\sqrt{2n}})^2)} \\
&\geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\frac{1}{\sqrt{2n}}}{k^\alpha(1+\frac{k}{2n})} \\
&\geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\frac{1}{\sqrt{2n}}}{(2n)^\alpha(1+\frac{2n}{2n})} \\
&\geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\frac{1}{\sqrt{2n}}}{2^{\alpha+1}n^\alpha} \\
&\geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2^{\alpha+\frac{3}{2}}n^{\alpha+\frac{1}{2}}} \\
&\geq (2n-(n+1)+1)\frac{1}{2^{\alpha+\frac{3}{2}}n^{\alpha+\frac{1}{2}}} \\
&\geq n\frac{1}{2^{\alpha+\frac{3}{2}}n^{\alpha+\frac{1}{2}}} \\
&\geq \frac{n^{1-\frac{1}{2}-\alpha}}{2^{\alpha+\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{S\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) \geq \frac{n^{\frac{1}{2}-\alpha}}{2^{\alpha+\frac{3}{2}}}.}$$

(b) Montrons que la fonction S n'est pas continue en 0. Pour ce faire, on raisonne par l'absurde et on suppose que S est continue en 0. Comme $u_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient que $S(0) = 0$. Comme S est continue en 0, on voit que $S(x)$ tend vers $S(0) = 0$ quand x tend vers 0. En particulier, comme $\frac{1}{\sqrt{2n}}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on trouve par composition des limites que :

$$\lim_{n\to+\infty} S\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = 0.$$

Comme $\alpha \leq \frac{1}{2}$, on voit que $n^{\frac{1}{2}-\alpha} \geq 1$ pour tout $n \geq 1$. Dès lors, on obtient d'après la question (4)(a) que, pour tout $n \geq 1$:

$$S\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) \geq \frac{1}{2^{\alpha+\frac{3}{2}}}.$$

Par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'inégalité ci-dessus, on trouve que :

$$\lim_{n\to+\infty} S\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) \geq \frac{1}{2^{\alpha+\frac{3}{2}}},$$

d'où il s'ensuit que $0 \geq \frac{1}{2^{\alpha+\frac{3}{2}}}$, ce qui est impossible. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } S \text{ n'est pas continue en } 0.}$$

Corrigé de l'exercice 3. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on pose :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x+e^t}, \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x+e^t)^2}, \quad I_a = \int_0^{+\infty} e^{-at}dt.$$

(1) Montrons que, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, l'intégrale I_a converge, et donnons sa valeur. Pour tout réel $y > 0$, on voit par un calcul simple que :

$$\int_0^y e^{-at}dt = \left[-\frac{e^{-at}}{a}\right]_0^y = -\frac{e^{-ay}}{a} + \frac{e^0}{a} = -\frac{e^{-ay}}{a} + \frac{1}{a}.$$

Comme $a > 0$, il s'ensuit que e^{-ay} tend vers 0 quand y tend vers $+\infty$, et donc l'intégrale $\int_0^y e^{-at}dt$ tend vers $\frac{1}{a}$ quand y tend vers $+\infty$. Par conséquent, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{\text{l'intégrale } I_a \text{ converge, et de plus : } I_a = \frac{1}{a}.}$$

(2) Montrons que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, les intégrales $f(x)$ et $g(x)$ convergent. Comme x est un réel positif, on voit que $x + e^t \geq e^t$ pour tout $t \in [0, +\infty[$, et donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq \frac{1}{x+e^t} \leq e^{-t}.$$

Comme l'intégrale $I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ converge d'après la question (1), il s'ensuit que l'intégrale $f(x)$ converge aussi d'après le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives. De même, comme x est un réel positif, il vient que $(x+e^t)^2 \geq e^{2t}$ pour tout $t \in [0, +\infty[$, et donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq \frac{1}{(x+e^t)^2} \leq e^{-2t}.$$

Comme l'intégrale $I_2 = \int_0^{+\infty} e^{-2t}dt$ converge d'après la question (1), il s'ensuit que l'intégrale $g(x)$ converge d'après le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives. Par conséquent :

$$\boxed{\text{les intégrales } f(x) \text{ et } g(x) \text{ convergent pour tout } x \in \mathbb{R}_+.}$$

(3) Etablissons que, pour tout $(x,t) \in (\mathbb{R}_+)^2$, on a : $2\sqrt{xe^t} \leq x + e^t$. Pour ce faire, il suffit de remarquer que, pour tout $(x,t) \in (\mathbb{R}_+)^2$:

$$(\sqrt{x} - \sqrt{e^t})^2 = (\sqrt{x})^2 + (\sqrt{e^t})^2 - 2\sqrt{xe^t} = x + e^t - 2\sqrt{xe^t} \geq 0.$$

Dès lors, il s'ensuit que, pour tout $(x,t) \in (\mathbb{R}_+)^2$, on a :

$$\boxed{2\sqrt{xe^t} \leq x + e^t.}$$

Par inversion de cette inégalité, on obtient que, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+^\times \mathbb{R}_+$:

$$0 \leq \frac{1}{x+e^t} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-t/2}.$$

Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t/2}dt$ converge d'après la question (1), on voit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-t/2}dt$ converge aussi par linéarité. De plus, par croissance et positivité de l'intégrale, il s'ensuit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x+e^t} \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-t/2}dt.$$

Mais comme $I_{1/2} = \int_0^{+\infty} e^{-t/2}dt = 2$ d'après la question (1), on en déduit par linéarité que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}.}$$

(4) Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$ tels que $x < y$. Montrons que : $0 < f(x) - f(y) \leq \frac{y-x}{2}$. Par des calculs simples , on a pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$\frac{1}{x+e^t} - \frac{1}{y+e^t} = \frac{(y+e^t)-(x+e^t)}{(x+e^t)(y+e^t)} = \frac{(y-x)}{(x+e^t)(y+e^t)}.$$

Comme $x, y, y-x, e^t$ sont ≥ 0, on voit que $x+e^t, y+e^t \geq e^t$, et donc pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$0 \leq \frac{1}{x+e^t} - \frac{1}{y+e^t} \leq (y-x)\frac{1}{e^t.e^t} = (y-x)e^{-2t}.$$

Comme les intégrales $f(x)$ et $f(y)$ convergent, il s'ensuit que l'intégrale $\int_0^{+\infty}(\frac{1}{x+e^t} - \frac{1}{y+e^t})dt$ converge aussi par linéarité. Dès lors, par positivité et croissance de l'intégrale, il s'ensuit que :

$$0 \leq \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x+e^t} - \frac{1}{y+e^t}\right)dt \leq \int_0^{+\infty}(y-x)e^{-2t}dt,$$

ce qui entraine après calculs que :

$$0 \leq \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x+e^t} - \frac{1}{y+e^t}\right)dt \leq \frac{(y-x)}{2}.$$

Par linéarité de l'intégrale, on sait que $f(x) - f(y) = \int_0^{+\infty}(\frac{1}{x+e^t} - \frac{1}{y+e^t})dt$, et donc :

$$0 \leq f(x) - f(y) \leq \frac{y-x}{2}.$$

A noter que, comme la fonction $t \longmapsto \frac{1}{x+e^t} - \frac{1}{y+e^t}$ est positive et non identiquement nulle d'après ce qui précède, il vient par stricte positivité de l'intégrale que $0 < f(x) - f(y)$. Par conséquent :

$$\boxed{0 < f(x) - f(y) \leq \frac{y-x}{2}.}$$

(5) Montrons que f réalise une bijection continue strictement décroissante de $\mathbb{R}_+$ sur $]0, 1]$. Pour ce faire, on peut commencer par remarquer que f est strictement décroissante. En effet, d'après la question précédente, on sait que, pour tous réels $x, y \geq 0$ tels que $x < y$, on a : $0 < f(x) - f(y)$, et donc f est strictement décroissante. A présent, montrons que f est continue sur $\mathbb{R}_+$. Toujours d'après la question précédente, on sait que que, pour tous réels $x, y \geq 0$ tels que $x < y$, on a :

$$0 < f(x) - f(y) \leq \frac{y-x}{2}.$$

Dès lors, il s'ensuit que, pour tous réels $x, y \geq 0$ tels que $x < y$:

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|y-x|}{2}.$$

On notera que cette inégalité est encore vraie si $x = y$ (puisque cela nous donne $0 \leq 0$). En échangeant les rôles joués par x et y, on obtient que, pour tous réels $x, y \geq 0$ tels que $x > y$:

$$|f(x) - f(y)| = |f(y) - f(x)| \leq \frac{|x-y|}{2} = \frac{|y-x|}{2}.$$

Dans tous les cas, on voit que, pour tous réels $x, y \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$0 \leq |f(x) - f(y)| \leq \frac{|y-x|}{2}.$$

Dès lors, pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+$ fixé, il s'ensuit d'après le théorème des gendarmes que $|f(x) - f(y)|$ tend vers 0 quand y tend vers x, et donc :

$$\lim_{y \to x} f(y) = f(x),$$

ce qui signifie exactement que f est continue en tout point $x \in \mathbb{R}_+$, et donc f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Partant de là, on sait donc que f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $f(\mathbb{R}_+)$, et il nous reste juste à calculer l'ensemble $f(\mathbb{R}_+)$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et que $\mathbb{R}_+$ est un intervalle, $f(\mathbb{R}_+)$ est un intervalle d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Reste donc à en déterminer les bornes. Par un calcul simple et d'après la question (1), on voit que :

$$f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{0+e^t} = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = I_1 = 1.$$

De plus, d'après la question (3), on sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

D'après le théorème des gendarmes, il s'ensuit que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Mais comme f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, il s'ensuit que :

$$f(\mathbb{R}_+) =]0,1].$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est une bijection continue strictement décroissante de } \mathbb{R}_+ \text{ sur }]0,1].}$$

(6) Prouvons que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$. Pour ce faire, considérons l'application $h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \geq 0$ par $h(x) = f(x) - x$. Tout d'abord, on voit que h est continue sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$. De plus, la fonction h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de fonctions strictement décroissantes sur $\mathbb{R}_+$. D'après le théorème de la bijection, h réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $h(\mathbb{R}_+)$, et il nous reste juste à calculer l'ensemble $h(\mathbb{R}_+)$. Comme h est continue sur $\mathbb{R}_+$ et que $\mathbb{R}_+$ est un intervalle, $h(\mathbb{R}_+)$ est un intervalle d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Reste donc à en déterminer les bornes. D'après la question (5), on a :

$$h(0) = f(0) - 0 = 1.$$

Toujours d'après la question (5), on sait que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, et donc $h(x) = f(x) - x$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$. Mais comme h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, il s'ensuit que :

$$h(\mathbb{R}_+) =]-\infty, 1].$$

Dès lors, la fonction h réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $]-\infty,1]$. Mais comme 0 appartient à $]-\infty,1]$, il admet un unique antécédent par f dans $\mathbb{R}_+$. Par conséquent :

$$\boxed{\text{l'équation } f(x) = x \text{ admet une unique solution sur } \mathbb{R}_+.}$$

(7) Soit α l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}_+$. Justifions que α appartient à $]0,1]$. Par définition, on sait que $f(\alpha) = \alpha$, et donc α appartient à $f(\mathbb{R}_+)$. Mais comme $f(\mathbb{R}_+) =]0,1]$ d'après la question (5), il s'ensuit que :

$$\boxed{\alpha \text{ appartient à }]0,1].}$$

(8) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) : \text{"} |\alpha - u_n| \leq \frac{1}{2^n} \text{"}.$$

Tout d'abord, comme $u_0 = 0$ et que $\alpha \in]0,1]$, on voit que $|\alpha - u_n| = |\alpha| = \alpha \leq 1 = 1/2^0$, et donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie. A présent, supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi. D'après les arguments de la question (6), on sait que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|y-x|}{2}.$$

Si l'on remplace x par α et y par u_n dans cette inégalité, il vient que :

$$|f(\alpha) - f(u_n)| \leq \frac{|\alpha - u_n|}{2}.$$

Comme $f(\alpha) = \alpha$ et que $f(u_n) = u_{n+1}$, il s'ensuit que :

$$|\alpha - u_{n+1}| \leq \frac{|\alpha - u_n|}{2}.$$

Mais par hypothèse de récurrence, on sait que $|\alpha - u_n| \leq \dfrac{1}{2^n}$, et donc :

$$|\alpha - u_{n+1}| \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}},$$

d'où il s'ensuit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout ordre $n \in \mathbb{N}$, et donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\alpha - u_n| \leq \frac{1}{2^n}.}$$

Comme $1/2^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes entraine que $(\alpha - u_n)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et donc :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha.}$$

(9) Montrons que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x + h \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$|f(x+h) - f(x) + hg(x)| \leq \frac{h^2}{3}.$$

Par des calculs simples, on obtient que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x + h \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x+h+e^t} - \frac{1}{x+e^t} + \frac{h}{(x+e^t)^2} &= \frac{(x+e^t)-(x+h+e^t)}{(x+e^t)(x+h+e^t)} + \frac{h}{(x+e^t)^2} \\
&= \frac{-h}{(x+e^t)(x+h+e^t)} + \frac{h}{(x+e^t)^2} \\
&= \frac{h[-(x+e^t)+(x+h+e^t)]}{(x+e^t)^2(x+h+e^t)} \\
&= \frac{h^2}{(x+e^t)^2(x+h+e^t)}.
\end{aligned}$$

Dès lors, il vient que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x + h \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\left| \frac{1}{x+h+e^t} - \frac{1}{x+e^t} + \frac{h}{(x+e^t)^2} \right| = \left| \frac{h^2}{(x+e^t)^2(x+h+e^t)} \right|.$$

Comme $x, x+h, e^t$ sont ≥ 0, il vient que $x + e^t, x + h + e^t \geq e^t$, et donc pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$\left| \frac{1}{x+h+e^t} - \frac{1}{x+e^t} + \frac{h}{(x+e^t)^2} \right| \leq \frac{h^2}{(e^t)^2.e^t} = h^2 e^{-3t}.$$

Comme les intégrales impropres $f(x), f(x+h), g(x)$ convergent, il s'ensuit que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} (\frac{1}{x+h+e^t} - \frac{1}{x+e^t} + \frac{h}{(x+e^t)^2}) dt$ converge aussi par linéarité. De plus, comme la valeur absolue de la fonction $t \longmapsto \frac{1}{x+h+e^t} - \frac{1}{x+e^t} + \frac{h}{(x+e^t)^2}$ est majorée par $t \longmapsto h^2 e^{-3t}$, et que l'intégrale $\int_0^{+\infty} h^2 e^{-3t} dt$ converge d'après la question (1), il s'ensuit que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} (\frac{1}{x+h+e^t} - \frac{1}{x+e^t} + \frac{h}{(x+e^t)^2}) dt$ est absolument convergente d'après le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives. Dès lors, d'après l'inégalité triangulaire et par croissance de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x+h+e^t} - \frac{1}{x+e^t} + \frac{h}{(x+e^t)^2} \right) dt \right| &\leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{1}{x+h+e^t} - \frac{1}{x+e^t} + \frac{h}{(x+e^t)^2} \right| dt \\
&\leq \int_0^{+\infty} h^2 e^{-3t} dt.
\end{aligned}$$

Comme $\int_0^{+\infty} e^{-3t} dt = \frac{1}{3}$ d'après la question (1), il s'ensuit par linéarité que :

$$\left| \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x+h+e^t} - \frac{1}{x+e^t} + \frac{h}{(x+e^t)^2} \right) dt \right| \leq \frac{h^2}{3}.$$

Toujours par linéarité de l'intégrale, on obtient que :

$$\left| \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x+h+e^t} - \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x+e^t} + h \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x+e^t)^2} \right| \leq \frac{h^2}{3}.$$

Mais par définition de $f(x+h), f(x), g(x)$, on en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x + h \in \mathbb{R}_+^*$, on a l'inégalité :

$$\boxed{|f(x+h) - f(x) + hg(x)| \leq \frac{h^2}{3}.}$$

(10) Justifions que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = -g(x)$. D'après la question précédente, on sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x+h \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$0 \leq |f(x+h) - f(x) + hg(x)| \leq \frac{h^2}{3}.$$

En divisant cet encadrement par $|h|$, on trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x+h \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$0 \leq \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - (-g)(x) \right| \leq \frac{|h|}{3}.$$

Comme $|h|$ tend vers 0 quand h tend vers 0, le théorème des gendarmes entraine que l'expression $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - (-g)(x)$ tend vers 0 quand h tend vers 0, et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -g(x).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et de plus : } f' = -g.}$$

(11) Soit $T : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par : $T(x) = xf(x)$. Montrons que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad T'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

D'après la question précédente, on sait que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc la fonction T est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme de plus $f' = -g$, il s'ensuit que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$T'(x) = 1.f(x) + xf'(x) = f(x) - xg(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x+e^t} - x \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x+e^t)^2}.$$

Par linéarité de l'intégrale, il vient que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} T'(x) &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x+e^t} - \frac{x}{(x+e^t)^2} \right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{x+e^t-x}{(x+e^t)^2} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(x+e^t)^2} dt. \end{aligned}$$

Si l'on pose $u = e^t$, alors on voit que $du = e^t dt$, que $u = 1$ si $t = 0$ et que $u = e^A$ si $t = A$. Dès lors, par changement de variable, on obtient que :

$$\int_0^A \frac{e^t}{(x+e^t)^2} dt = \int_1^{e^A} \frac{du}{(x+u)^2} = \left[-\frac{1}{x+u} \right]_1^{e^A} = -\frac{1}{x+e^A} + \frac{1}{x+1}.$$

Comme e^A tend vers $+\infty$ quand A tend vers $+\infty$, il s'ensuit que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(x+e^t)^2} dt = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A \frac{e^t}{(x+e^t)^2} dt = \lim_{A \to +\infty} -\frac{1}{x+e^A} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+1}.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{T'(x) = \frac{1}{x+1}.}$$

(12) D'après le résultat de la question précédente, il s'ensuit par intégration qu'il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $T(x) = K + \ln(1+x)$. Mais comme $T(x) = xf(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, il s'ensuit que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$f(x) = \frac{K}{x} + \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Comme $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, on voit que $\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} 1$, et donc $\frac{\ln(1+x)}{x}$ tend vers 1 quand x tend vers 0. Mais comme f est continue en 0, il s'ensuit que $\frac{K}{x}$ admet une limite finie quand x tend vers 0^+, ce qui n'est possible que si $K = 0$. Par conséquent :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}.}$$

Corrigé de l'exercice 4. Soit α un entier > 1 fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$.

(1) (a) Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le réel u_n est bien défini et que $u_n > 0$. Tout d'abord, on peut remarquer que la fonction $t \longmapsto \frac{1}{(1+t^\alpha)^n}$ est définie et continue sur $[0, +\infty[$, comme inverse d'une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$. Dès lors, l'intégrale u_n présente une seule impropreté, à savoir en $+\infty$. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on voit que $1 + t^\alpha \geq t^\alpha$, et donc $(1+t^\alpha)^n \geq t^{n\alpha}$, ce qui entraine que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq \frac{1}{(1+t^\alpha)^n} \leq \frac{1}{t^{n\alpha}}.$$

Comme $n \geq 1$ et que $\alpha \geq 2$, il s'ensuit que $n\alpha \geq 2$, et donc l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{n\alpha}}$ converge. Dès lors, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$ converge aussi d'après le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives. Mais comme l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$ est bien définie (comme intégrale d'une fonction continue sur le segment $[0, 1]$), il s'ensuit d'après la relation de Chasles que u_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En outre, comme la fonction $t \longmapsto \frac{1}{(1+t^\alpha)^n}$ est positive et non identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+$, il s'ensuit par stricte positivité de l'intégrale que :

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n} > 0.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{le réel } u_n \text{ est bien défini et } u_n > 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.}$$

(b) Etudions les variations de la suite (u_n). Comme $(1+t^\alpha) \geq 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on voit que $(1+t^\alpha)^{n+1} = (1+t^\alpha)(1+t^\alpha)^n \geq (1+t^\alpha)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{1}{(1+t^\alpha)^{n+1}} \leq \frac{1}{(1+t^\alpha)^n}.$$

Par croissance de l'intégrale, il s'ensuit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^{n+1}} \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}.$$

d'où l'on déduit que $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et donc :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante.}}$$

Mais comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0 d'après la question $(1)(b)$, il vient que :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge.}}$$

(2) (a) A l'aide d'une intégration par parties, montrons que $u_n = n\alpha(u_n - u_{n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soit y un réel > 0, et posons $u(t) = \frac{1}{(1+t^\alpha)^n}$, $v(t) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Alors u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, et de plus $u'(t) = -\frac{n\alpha t^{\alpha-1}}{(1+t^\alpha)^{n+1}}$, $v'(t) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Par intégration par parties, on obtient que :

$$\begin{aligned}
\int_0^y \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n} &= \int_0^y u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_0^y - \int_0^y u'(t)v(t)dt \\
&= \left[\frac{t}{(1+t^\alpha)^n}\right]_0^y - \int_0^y -\frac{n\alpha t^{\alpha-1}t}{(1+t^\alpha)^{n+1}}dt,
\end{aligned}$$

ce qui nous donne après simplification et par linéarité de l'intégrale que :

$$\int_0^y \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n} = \frac{y}{(1+y^\alpha)^n} + n\alpha \int_0^y \frac{t^\alpha}{(1+t^\alpha)^{n+1}}dt.$$

Comme $t^\alpha = (1+t^\alpha) - 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, il s'ensuit par linéarité de l'intégrale que :

$$\begin{aligned}
\int_0^y \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n} &= \frac{y}{(1+y^\alpha)^n} + n\alpha \int_0^y \frac{t^\alpha}{(1+t^\alpha)^{n+1}} dt \\
&= \frac{y}{(1+y^\alpha)^n} + n\alpha \int_0^y \frac{(1+t^\alpha)-1}{(1+t^\alpha)^{n+1}} dt \\
&= \frac{y}{(1+y^\alpha)^n} + n\alpha \left(\int_0^y \frac{(1+t^\alpha)}{(1+t^\alpha)^{n+1}} dt - \int_0^y \frac{dt}{(1+t^\alpha)^{n+1}} \right) \\
&= \frac{y}{(1+y^\alpha)^n} + n\alpha \left(\int_0^y \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n} - \int_0^y \frac{dt}{(1+t^\alpha)^{n+1}} \right) \quad (*).
\end{aligned}$$

Comme $\alpha > 1$, on voit que y^α tend vers $+\infty$ quand y tend vers $+\infty$, et donc $1 \underset{y \to +\infty}{=} o(y^\alpha)$. Dès lors, on a $1 + y^\alpha \underset{y\to+\infty}{\sim} y^\alpha$, ce qui entraine que $(1+y^\alpha)^n \underset{y\to+\infty}{\sim} y^{n\alpha}$, et donc :

$$\frac{y}{(1+y^\alpha)^n} \underset{y\to+\infty}{\sim} \frac{y}{y^{n\alpha}} \underset{y\to+\infty}{\sim} \frac{1}{y^{n\alpha-1}}.$$

Mais comme $n \geq 1$ et $\alpha \geq 2$, on voit que $n\alpha - 1 > 0$, et donc $\frac{1}{y^{n\alpha-1}}$ tend vers 0 quand y tend vers $+\infty$. En particulier, $\frac{y}{(1+y^\alpha)^n}$ tend vers 0 quand y tend vers $+\infty$. Dès lors, par passage à la limite quand y tend vers $+\infty$ dans l'égalité $(*)$, on trouve que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n} = 0 + n\alpha \left(\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n} - \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^{n+1}} \right).$$

Mais par définition de (u_n), on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{u_n = n\alpha(u_n - u_{n+1}).}$$

(b) Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout entier $n \geq 2$ par :

$$\mathcal{P}(n) : \text{"} u_n = u_1 \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right) \text{"}.$$

Tout d'abord, on voit que $\mathcal{P}(2)$ est vraie. En effet, d'après la question (2)(a), on sait que $u_1 = \alpha(u_1 - u_2)$, ce qui entraine que $u_1(1-\alpha) = -\alpha u_2$, et donc :

$$u_2 = u_1 \left(\frac{1-\alpha}{-\alpha}\right) = u_1 \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) = u_1 \prod_{k=1}^{2-1} \left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right).$$

A présent, supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi. D'après la question (2)(a), on sait que $u_n = n\alpha(u_n - u_{n+1})$, ce qui entraine que $u_n(1-n\alpha) = -n\alpha u_{n+1}$, et donc il s'ensuit que :

$$u_{n+1} = u_n \left(\frac{1-n\alpha}{-n\alpha}\right) = u_n \left(1 - \frac{1}{n\alpha}\right).$$

Par hypothèse de récurrence, on sait que : $u_n = u_1 \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right)$, et donc :

$$u_{n+1} = u_1 \left[\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right)\right] \times \left(1 - \frac{1}{n\alpha}\right) = u_1 \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right),$$

ce qui implique que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout ordre $n \geq 2$. Dès lors, on vient de montrer que :

$$\boxed{\forall n \geq 2, \quad u_n = u_1 \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right).}$$

(3) Montrons que la suite (u_n) tend vers 0. Pour ce faire, on considère la suite $(\ln(u_n))$. D'après le résultat de la question précédente et les propriétés du logarithme, on obtient que, pour tout $n \geq 2$:

$$\ln(u_n) = \ln(u_1) + \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right).$$

On reconnait alors (au terme $\ln(u_1)$ et au signe près) une somme partielle de la série $\sum -\ln\left(1-\frac{1}{k\alpha}\right)$. Remarquons tout d'abord que cette série est à termes positifs. En effet, pour tout entier $k \geq 1$, on voit que $k\alpha \geq 2$, ce qui entraine que $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{k\alpha} > 0$, et donc $\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{k\alpha} < 1$. En passant au logarithme (qui est une fonction strictement croissante), puis en changeant de signe, il vient que :

$$-\ln\left(\frac{1}{2}\right) \geq -\ln\left(1-\frac{1}{k\alpha}\right) > 0,$$

ce qui entraine que la série $\sum -\ln\left(1-\frac{1}{k\alpha}\right)$ est à termes positifs. De plus, comme $-\frac{1}{k\alpha}$ tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$, et que $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, on trouve par substitution que :

$$-\ln\left(1-\frac{1}{k\alpha}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} -\left(-\frac{1}{k\alpha}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k\alpha}.$$

Comme la série harmonique $\sum \frac{1}{k}$ diverge d'après le cours, il s'ensuit par linéarité que la série $\sum \frac{1}{\alpha k}$ diverge également. Dès lors, la série $\sum -\ln\left(1-\frac{1}{k\alpha}\right)$ diverge aussi d'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs. En particulier, la série $\sum \ln\left(1-\frac{1}{k\alpha}\right)$ diverge par linéarité. A noter que, comme cette série est à termes négatifs, cela signifie que la suite (S'_n) de ses sommes partielles tend vers $-\infty$. Mais comme $\ln(u_n) = \ln(u_1) + S'_{n-1}$ pour tout $n \geq 2$, il s'ensuit que la suite $(\ln(u_n))$ tend aussi vers $-\infty$. En composant par l'exponentielle, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ tend vers } 0.}$$

(4) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

(a) Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout entier $n \geq 1$ par :

$$\mathcal{P}(n) : "S_n = \frac{n\alpha}{\alpha-1}u_{n+1}".$$

Tout d'abord, on voit que $\mathcal{P}(1)$ est vraie. En effet, d'après les calculs de la question (2)(b), on sait que $u_2 = \frac{\alpha}{\alpha-1}u_2$, ce qui entraine que :

$$S_1 = \sum_{k=1}^{1} u_k = u_1 = \frac{\alpha}{\alpha-1}u_2 = \frac{1.\alpha}{\alpha-1}u_{1+1}.$$

A présent, supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi. Par définition de la suite (S_n) et par hypothèse de récurrence, on trouve que :

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} u_k = S_n + u_{n+1} = \frac{n\alpha}{\alpha-1}u_{n+1} + u_{n+1} = \frac{n\alpha+\alpha-1}{\alpha-1}u_{n+1} = \frac{(n+1)\alpha-1}{\alpha-1}u_{n+1}.$$

En outre, d'après la question (2)(a), on sait que $u_{n+1} = (n+1)\alpha(u_{n+1}-u_{n+2})$, ce qui entraine que $((n+1)\alpha-1)u_{n+1} = (n+1)\alpha u_{n+2}$, et donc :

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)\alpha-1}{\alpha-1}u_{n+1} = \frac{(n+1)\alpha}{\alpha-1}u_{n+2},$$

d'où il s'ensuit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout ordre $n \geq 1$. Dès lors, on vient de montrer que :

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad S_n = \frac{n\alpha}{\alpha-1}u_{n+1}.}$$

(b) Montrons que, pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$\ln(S_n) = \ln(u_1) + \sum_{k=2}^{n}\left[\ln\left(1-\frac{1}{k\alpha}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right].$$

D'après les résultats des questions (2)(b) et (4)(a), on trouve que, pour tout $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
\ln(S_n) &= \ln\left(\frac{n\alpha}{\alpha-1}u_{n+1}\right) \\
&= \ln(n) - \ln\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right) + \ln(u_{n+1}) \\
&= \ln(n) - \ln\left(1-\frac{1}{\alpha}\right) + \ln(u_{n+1}) \\
&= \ln(n) - \ln\left(1-\frac{1}{\alpha}\right) + \ln\left(u_1 \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k\alpha}\right)\right) \\
&= \ln(n) - \ln\left(1-\frac{1}{\alpha}\right) + \ln(u_1) + \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k\alpha}\right) \\
&= \ln(u_1) + \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k\alpha}\right) + \ln(n) \quad (*).
\end{aligned}$$

En outre, partant des propriétés du logarithme, on trouve que, pour tout entier $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n} [\ln(k-1) - \ln(k)] \\
&= \ln(1) - \ln(2) + ... + \ln(n-1) - \ln(n) \quad = \quad -\ln(n) \quad (**).
\end{aligned}$$

En réunissant les égalités $(*)$ et $(**)$, on obtient alors que :

$$\ln(S_n) = \ln(u_1) + \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k\alpha}\right) + \ln(n) = \ln(u_1) + \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k\alpha}\right) - \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k}\right),$$

d'où l'on déduit par linéarité de la somme que, pour tout entier $n \geq 2$:

$$\boxed{\ln(S_n) = \ln(u_1) + \sum_{k=2}^{n}\left[\ln\left(1-\frac{1}{k\alpha}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right].}$$

(c) Déterminons un équivalent, quand k tend vers $+\infty$, de $\ln\left(1-\frac{1}{k\alpha}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right)$. Pour ce faire, on part du fait que $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x + o(x)$. Comme $\frac{1}{k}$ et $\frac{1}{k\alpha}$ tendent vers 0 quand k tend vers $+\infty$, on obtient par substitution que :

$$\ln\left(1-\frac{1}{k\alpha}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{k\alpha} + o\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{et} \quad \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right).$$

D'après les règles de calculs sur les développements limités, il s'ensuit que :

$$\ln\left(1-\frac{1}{k\alpha}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right).$$

Comme α est un entier ≥ 2, il s'ensuit que $\left(1-\frac{1}{\alpha}\right) \neq 0$, et donc :

$$\boxed{\ln\left(1-\frac{1}{k\alpha}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{k}.}$$

(d) Déterminons la nature de la série $\sum u_n$. Pour ce faire, on considère la série $\sum_{k\geq 2} v_k$, où :

$$v_k = \ln\left(1-\frac{1}{k\alpha}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right).$$

Comme $\alpha \geq 2$, on voit que $k\alpha > k$, ce qui entraine que $\frac{1}{k\alpha} < \frac{1}{k}$, et donc $1-\frac{1}{k\alpha} > 1-\frac{1}{k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Comme ln est strictement croissante, il s'ensuit que $\ln(1-\frac{1}{k\alpha}) > \ln(1-\frac{1}{k})$, et donc

$v_k > 0$ pour tout $k \geq 2$. En particulier, la série $\sum v_k$ est à termes positifs. De plus, d'après la question précédente, on sait que :

$$v_k \underset{k \to +\infty}{\sim} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{1}{k}.$$

Remarquons que, comme $\alpha \geq 2$, on a : $\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \neq 0$. Dès lors, comme la série harmonique $\sum \frac{1}{k}$ diverge d'après le cours, il s'ensuit par linéarité que la série $\sum \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{1}{k}$ diverge, et donc la série $\sum v_k$ diverge d'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs. En particulier, comme cette série est à termes positifs, la suite (S''_n) de ses sommes partielles tend vers $+\infty$. Or, par construction de la série $\sum v_k$ et d'après la question $(4)(b)$, on sait que, pour tout $n \geq 2$:

$$S''_n = \sum_{k=2}^{n} v_k = \ln(S_n) - \ln(u_1).$$

Comme la suite (S''_n) tend vers $+\infty$, il s'ensuit que la suite $(\ln(S_n))$ tend vers $+\infty$, et donc la suite (S_n) tend aussi vers $+\infty$. Mais comme (S_n) est la suite des sommes partielles de la série $\sum u_k$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la série } \sum u_k \text{ diverge.}}$$