Programme de colles en Mathématiques
ECG 2 (semaine 3 : 30 septembre 2024)

La colle débutera soit par une démonstration d'un résultat de cours (indiqué par un astérisque), soit par un exercice de début de colle. Le programme portera sur les limites et comparaison de fonctions, sur la continuité des fonctions ainsi que sur les intégrales impropres, et plus particulièrement sur les points suivants:

(1) **Limites et comparaison de fonctions (révisions):**
Définition de la limite (finie ou infinie) en un réel a ou à l'infini.
Définition des limites à droite et à gauche en un réel a. Unicité de la limite.
Opérations algébriques sur les limites - Limite d'une fonction composée.
Compatibilité avec la relation d'ordre - Prolongement par continuité en un point.
Théorème de la limite monotone - Théorème des Gendarmes (encadrement).
"Si f admet une limite l en x_0 et si (u_n) tend vers x_0, alors $(f(u_n))$ tend vers l".
Définition d'une fonction négligeable devant une autre en un réel a, en l'infini.
Définition d'une fonction équivalente à une autre en un réel a, en l'infini.
Propriétés et opérations sur les négligeables et sur les équivalents.
Négligeables et équivalents classiques - Croissances comparées.
Application des négligeables et équivalents au calcul de limites.

(2) **Continuité des fonctions (révisions):**
Définition et propriétés des applications continues en un réel a.
Définition et propriétés des applications continues d'un intervalle dans $\mathbb{R}$.
Opérations algébriques sur les fonctions continues - Composition.
Théorème des valeurs intermédiaires et conséquences :
"Toute application continue sur un intervalle I, qui change de signe sur I, s'annule sur I".
"L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle".
"Toute application continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes".
"L'image d'un segment par une application continue est un segment".
Théorème de la bijection.

(3) **Intégrales impropres (révisions):**
Définition d'une intégrale impropre, et d'une intégrale doublement impropre.
Définition d'une intégrale impropre convergente, et d'une intégrale impropre divergente.
"Une intégrale impropre en une borne b finie ou infinie converge si et seulement si toute primitive de la fonction qu'on intègre admet une limite finie en b".
Prolongement par continuité - Intégrales faussement impropres.
Propriétés de base : linéarité, positivité, stricte positivité, croissance, relation de Chasles.
Méthodes de calculs : intégration par parties et changement de variable.
Critères de comparaison et d'équivalence des intégrales de fonctions positives.
Définition d'une intégrale impropre absolument convergente.
" Toute intégrale impropre absolument convergente est convergente".
Inégalité triangulaire pour les intégrales impropres absolument convergentes.
Critère de négligeabilité pour les intégrales impropres.
Définition et propriétés des intégrales de Riemann et des intégrales exponentielles.
Définition et propriétés de la fonction Gamma d'Euler: "convergence de $\Gamma(x)$ si et seulement si $x > 0$" (*), "$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$" (*), "$\Gamma(n+1) = n!$" (*).

Exercices de début de colle:

Exercice 1. Déterminer la nature de l'une des intégrales impropres suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) dx, \quad \int_1^{+\infty} \left(\ln(x^2+1) - \ln(x^2)\right) dx, \quad \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx.$$

Exercice 2. Calculer à l'aide de l'intégration par parties l'une des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} (1-t)e^{-t}dt, \quad \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-t}dt.$$

Exercice 3. Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variables proposé entre parenthèses :

$$\int_0^{+\infty} \frac{2t\ln(t)}{(1+t^2)^2}dt \quad \left(\text{poser } t = \frac{1}{u}\right), \quad \int_0^{+\infty} te^{-\sqrt{t}}dt \quad \left(\text{poser } u = \sqrt{t}\right).$$