Programme de colles en Mathématiques
ECG 2 (semaine 4 : 7 octobre 2024)

La colle débutera soit par une démonstration d'un résultat de cours (indiqué par un astérisque), soit par un exercice de début de colle. Le programme portera sur la continuité des fonctions, sur les intégrales impropres et sur les espaces vectoriels, et plus particulièrement sur les points suivants:

(1) **Continuité des fonctions (révisions):**
Définition et propriétés des applications continues en un réel a.
Définition et propriétés des applications continues d'un intervalle dans $\mathbb{R}$.
Opérations algébriques sur les fonctions continues - Composition.
Théorème des valeurs intermédiaires et conséquences :
"Toute application continue sur un intervalle I, qui change de signe sur I, s'annule sur I".
"L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle".
"Toute application continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes".
"L'image d'un segment par une application continue est un segment".
Théorème de la bijection.

(2) **Intégrales impropres (révisions):**
Définition d'une intégrale impropre, et d'une intégrale doublement impropre.
Définition d'une intégrale impropre convergente, et d'une intégrale impropre divergente.
"Une intégrale impropre en une borne b finie ou infinie converge si et seulement si toute primitive de la fonction qu'on intègre admet une limite finie en b".
Prolongement par continuité - Intégrales faussement impropres.
Propriétés de base : linéarité, positivité, stricte positivité, croissance, relation de Chasles.
Méthodes de calculs : intégration par parties et changement de variable.
Critères de comparaison et d'équivalence des intégrales de fonctions positives.
Définition d'une intégrale impropre absolument convergente.
" Toute intégrale impropre absolument convergente est convergente".
Inégalité triangulaire pour les intégrales impropres absolument convergentes.
Critère de négligeabilité pour les intégrales impropres.
Définition et propriétés des intégrales de Riemann et des intégrales exponentielles.
Définition et propriétés de la fonction Gamma d'Euler: "convergence de $\Gamma(x)$ si et seulement si $x > 0$" (*), "$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$" (*), "$\Gamma(n+1) = n!$" (*).

(3) **Systèmes linéaires - Espaces vectoriels (révisions):**
Systèmes linéaires de n équations à p inconnues. Méthode du Pivot de Gauss.
Définition et propriétés de base d'un espace vectoriel.
Définition et propriétés des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel.
Définition et propriétés des familles libres, liées et génératrices de vecteurs.
Sous-espaces vectoriels engendrés par des familles de vecteurs.
Espaces vectoriels de dimension finie, bases d'un espace vectoriel.
Matrice-colonne des coordonnées d'un vecteur dans une base.
Théorème de la base incomplète et conséquences - Définition et propriétés de la dimension.
Espaces vectoriels de référence - Base canonique et dimension de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[x]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
Définition, propriétés et calcul pratique du rang d'une famille finie de vecteurs.
Définition et propriétés de la somme de deux sous-espaces vectoriels.
Somme directe de deux sous-espaces vectoriels - Formule de Grassmann, conséquences.
Définition et propriétés du supplémentaire d'un sous-espace vectoriel.
Définition et propriétés de la somme de r sous-espaces vectoriels.
Définition et propriétés de la somme directe de r sous-espaces vectoriels.

<u>Exercices de début de colle</u>:

Exercice 1. Nature de l'une des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) dx, \quad \int_0^{+\infty} \big(\ln(x^2+1) - \ln(x^2)\big)\, dx.$$

Exercice 2. A l'aide de l'IPP, calculer l'une des intégrales : $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1-t)e^{-t}dt, \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-t}dt.$

Exercice 3. A l'aide du changement de variables proposé, calculer l'une des intégrales :

$$\int_0^{+\infty} \frac{2t\ln(t)}{(1+t^2)^2}dt \quad \left(\text{poser } t = \frac{1}{u}\right), \quad \int_0^{+\infty} te^{-\sqrt{t}}dt \quad \left(\text{poser } u = \sqrt{t}\right).$$

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système linéaire : $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 6 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 11 \\ -x & - & 5y & + & 6z & = & -7 \end{array}\right.$

Exercice 5. Déterminer une base de l'espace vectoriel E dans chacun des cas suivants :

(1) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x+y-z=0\}$,

(2) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x+5y-3z = -x-4y+2z = 0\}$.