Lycée Clemenceau **Jeudi 26 septembre 2024**
ECG 2 **Durée : 4 heures**

Devoir Surveillé de Mathématiques $n^o 1$

Remarques : *Il est toujours permis d'admettre les résultats de questions précédentes pour traiter les questions suivantes. Chaque réponse doit être démontrée et toutes les étapes des calculs doivent être données. On attachera un soin tout particulier à la clarté et à la propreté de la rédaction. Les téléphones portables et les calculatrices, ainsi que tous matériels électroniques sont interdits.*

Exercice 1. On définit sur l'intervalle $]0,1]$ les deux fonctions $f : x \longmapsto x\ln(x)$ et $g : x \longmapsto x^x = e^{x\ln(x)}$.

(1) (a) Les fonctions f et g admettent-elles des limites finies en 0? Justifier.
(b) Donnons les variations de f sur $]0,1]$.
(c) Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g(t)dt$ converge. On notera I sa valeur.

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 t^n \ln^n(t)dt$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.
(a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et donner u_0.
(b) Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.

(3) Pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, on pose $K_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 t^p \ln^q(t)dt$.
(a) A l'aide d'une intégration par parties, établir une relation entre $K_{p,q}$ et $K_{p,q-1}$.
(b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$.
(c) Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

(4) (a) A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n en 0 appliquée à la fonction exponentielle, montrer que, pour tout $x \in [-e^{-1}, 0]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}.$$
(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$|I - S_n| \leq \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}.$$
(c) Montrer que : $I = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}$.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f_n(x) = 1 - x - x^n$.

(1) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue x admet une unique solution, notée u_n.

(2) (a) Vérifier que u_n appartient à $]0,1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
(b) En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$, puis établir que la suite (u_n) est croissante.
(c) Conclure que la suite (u_n) converge et que sa limite appartient à $[0,1]$.
(d) Montrer par l'absurde que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

(3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = 1 - u_n$.
(a) Justifier que $v_n > 0$, puis montrer que : $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -nv_n$.
(b) Etablir que :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)} = 0.$$
En déduire que : $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(n)$.
(c) Montrer enfin que : $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$.

(4) Déterminer la nature des séries de termes généraux v_n et v_n^2.

Problème 1. On désigne par J l'intervalle $]-1,+\infty[$. Dans ce problème, on se propose d'étudier l'application f définie pour tout $x \in J$ par :

$$f(x)=\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}dt.$$

(1) **Préliminaires :**

(a) Justifier la convergence des séries $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$, $\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^2}$ et $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

(b) En admettant que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, montrer que : $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

(c) En déduire que : $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}$.

(2) **Éléments d'étude de f :**

(a) Justifier, pour tout $x \in J$, la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}dt$.

(b) Calculer les valeurs de $f(0)$ et de $f(1)$.

(c) Montrer que, pour tout $x \in J$, on a : $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x+1}$, et en déduire que : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

(d) (i) Montrer que, pour tout $(x,y)\in J^2$ et tout $t\in]0,1]$, on a : $x\leq y \Longrightarrow t^x \geq t^y$.

(ii) En déduire que f est décroissante sur J.

(e) Montrer que, pour tout $x \in J$, on a : $f(x)+f(x+1)=\frac{1}{x+1}$.

(f) En déduire que : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$.

(g) Soit x un élément de J.

(i) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $f(x)=(-1)^{n+1}f(n+1+x)+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1+x}$.

(ii) En déduire que la série numérique $\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{k+1+x}$ converge et que : $f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+1+x}$.

(h) (i) Montrer que, pour tout $(x,y)\in J^2$ et tout $k\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$\left|\frac{1}{k+1+x}-\frac{1}{k+1+y}\right| \leq \frac{|x-y|}{k^2}.$$

(ii) En déduire que, pour tout $(x,y)\in J^2$, on a : $|f(x)-f(y)|\leq |x-y|\left(\frac{1}{(x+1)(y+1)}+\frac{\pi^2}{6}\right)$.

(iii) En déduire que f est continue sur J.

(i) Montrer que : $f(x)\underset{x\to-1}{\sim}\frac{1}{x+1}$, et en déduire la limite de f en -1.

(3) **Dérivabilité de f :**

Pour tout $k\in\mathbb{N}$, on note g_k l'application de classe $\mathcal{C}^2$ de J dans $\mathbb{R}$, définie pour tout $x\in J$ par :

$$g_k(x)=\frac{(-1)^k}{k+1+x}.$$

(a) Montrer que, pour tout $(x,y)\in J^2$ et tout $k\in\mathbb{N}^*$, on a : $|g_k(x)-g_k(y)-(x-y)g_k'(x)|\leq \frac{|x-y|^2}{k^3}$.

(b) Justifier la convergence des séries $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^3}$ et $\sum_{k\geq 0} g_k'(x)$ pour tout $x\in J$.

(c) En déduire que f est dérivable sur J et que, pour tout $x\in J$, on a : $f'(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1+x)^2}$.

(d) Déterminer la valeur de $f'(0)$.