Lycée Clemenceau **Jeudi 26 septembre 2024**
ECG 2 **Durée : 4 heures**

Corrigé du devoir Surveillé de Mathématiques $n^o 1$

Corrigé de l'exercice 1. On définit sur l'intervalle $]0,1]$ les deux fonctions $f : x \longmapsto x\ln(x)$ et $g : x \longmapsto x^x = e^{x\ln(x)}$.

(1) (a) Justifions que les fonctions f et g admettent des limites finies en 0. Par croissances comparées, on voit que :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0.$$

Dès lors, comme $g = e^f$ par construction et que l'exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$, il s'ensuit que :

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} e^{x\ln(x)} = e^0 = 1.$$

Par conséquent, on en déduit que ;

$$\boxed{f \text{ et } g \text{ admettent des limites finies en } 0.}$$

(b) Donnons les variations de f sur $]0,1]$. Par définition, la fonction f est dérivable sur $]0,1]$ comme produit de fonctions dérivables sur $]0,1]$ et de plus, on a pour tout $x \in]0,1]$:

$$f'(x) = x \times \frac{1}{x} + 1 \times \ln(x) = \ln(x) + 1.$$

En particulier, on voit que $f'(x) \geq 0$ si et seulement si $\ln(x) \geq -1$, c'est-à-dire si $x \geq e^{-1}$. Par conséquent, on en déduit que ;

$$\boxed{f \text{ est décroissante sur }]0,e^{-1}] \text{ et croissante sur }]e^{-1},1].}$$

(c) Justifions que l'intégrale $I = \int_0^1 g(t)dt$ converge. Comme $g(x) = e^{x\ln(x)}$ pour tout $x \in]0,1]$, la fonction g est continue sur $]0,1]$, et donc I est impropre en 0. Dès lors, comme la fonction g tend vers 1 en 0 d'après la question $(1)(a)$, l'intégrale I est faussement impropre en 0, et donc :

$$\boxed{I \text{ converge.}}$$

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 t^n \ln^n(t)dt$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

(a) Justifions tout d'abord que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe. Comme la fonction $t \longmapsto t^n \ln^n(t)$ est continue sur $]0,1]$, on sait que l'intégrale u_n est impropre en 0. De plus, si $n > 0$, on voit que $t^n \ln^n(t)$ tend vers 0 quand t tend vers 0 par croissances comparées. En outre, si $n = 0$, on constate que $t^0 \ln^0(t) = 1$ tend évidemment vers 1 quand t tend vers 0. Dans tous les cas, on obtient que l'intégrale u_n est faussement impropre en 0, et donc elle converge pour tout $n \in \mathbb{N}$. En d'autres termes, cela signifie que :

$$\boxed{u_n \text{ existe pour tout } n \in \mathbb{N}.}$$

A présent, donnons la valeur u_0. Par des calculs simples, on trouve que :

$$u_0 = \frac{1}{0!}\int_0^1 t^0 \ln^0(t)dt = \frac{1}{1}\int_0^1 dt = [t]_0^1 = 1.$$

Par conséquent, on en déduit que ;

$$\boxed{u_0 = 1.}$$

(b) Montrons que la suite (u_n) converge vers 0. D'après la question $(1)(b)$, on sait que la fonction f est décroissante sur $]0,e^{-1}]$ et croissante sur $]e^{-1},1]$. Comme de plus f tend vers 0 en 0 d'après la question $(1)(a)$, que $f(e^{-1}) = e^{-1}\ln(e^{-1}) = -e^{-1}$ et que $f(1) = 1\ln(1) = 0$, on voit que $-e^{-1} \leq f(x) \leq 0$ pour tout $x \in]0,1]$. En particulier, ceci entraine que $|f^n(x)| \leq e^{-n}$ pour tout $x \in]0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. D'après l'inégalité triangulaire et par croissance de l'intégrale, on trouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left|\int_0^1 t^n \ln^n(t)dt\right| \leq \int_0^1 |t^n \ln^n(t)|\, dt \leq \int_0^1 e^{-n}dt = e^{-n}.$$

Dès lors, on obtient par définition de u_n que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|u_n| = \left| \frac{1}{n!} \int_0^1 t^n \ln^n(t)dt \right| \leq \frac{e^{-n}}{n!}.$$

En d'autres termes, on vient de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq |u_n| \leq \frac{e^{-n}}{n!}.$$

Comme $0 < e^{-1} < 1$, on voit que la suite $\left(\frac{e^{-n}}{n!}\right)$ converge vers 0 comme produit de deux suites (dont une géométrique de raison < 1 en valeur absolue) qui tendent vers 0. Par encadrement, il s'ensuit que la suite $(|u_n|)$ tend vers 0, et donc :

$$\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 0.}$$

(3) Pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, on pose $K_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 t^p \ln^q(t)dt$.

(a) Etablissons une relation entre $K_{p,q}$ et $K_{p,q-1}$ pour tous p, q tels que $q > 0$. Pour ce faire, fixons un réel $a \in]0,1]$, puis posons $u(t) = \frac{t^{p+1}}{p+1}$ et $v(t) = \ln^q(t)$ pour tout $t \in [a,1]$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,1]$ et de plus, on a $u'(t) = t^p$ et $v'(t) = \frac{q \ln^{q-1}(t)}{t}$ pour tout $t \in [a,1]$. Dès lors, on obtient par intégration par parties que :

$$\begin{aligned}
\int_a^1 t^p \ln^q(t)dt &= \int_a^1 u'(t)v(t)dt \\
&= [u(t)v(t)]_a^1 - \int_a^1 u(t)v'(t)dt \\
&= \left[\frac{t^{p+1}\ln^q(t)}{p+1}\right]_a^1 - \int_a^1 \frac{t^{p+1} q \ln^{q-1}(t)}{(p+1)t}dt \\
&= 0 - \frac{a^{p+1}\ln^q(a)}{p+1} - \int_a^1 \frac{q t^p \ln^{q-1}(t)}{(p+1)}dt.
\end{aligned}$$

Comme $a^{p+1}\ln^q(a)$ tend vers 0 quand a tend vers 0 par croissances comparées, on trouve par passage à la limite quand a tend vers 0 dans l'égalité ci-dessus, puis par linéarité de l'intégrale que :

$$\int_0^1 t^p \ln^q(t)dt = -\int_0^1 \frac{q t^p \ln^{q-1}(t)}{(p+1)}dt = \frac{-q}{p+1}\int_0^1 t^p \ln^{q-1}(t)dt.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tous p, q tels que $q > 0$:

$$\boxed{K_{p,q} = \frac{-q}{p+1} K_{p,q-1}.}$$

(b) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$. Pour ce faire, on se fixe un entier $p \geq 0$ et on pose $v_k = \frac{K_{p,k}}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, on voit que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$v_k = \frac{K_{p,k}}{k!} = -\frac{k}{p+1} \times \frac{K_{p,k-1}}{k(k-1)!} = -\frac{1}{p+1} \times \frac{K_{p,k-1}}{(k-1)!} = -\frac{1}{p+1} v_{k-1}.$$

En particulier, la suite (v_k) est géométrique de raison $-\frac{1}{p+1}$. Mais comme :

$$v_0 = \frac{K_{p,0}}{0!} = \int_0^1 x^p (\ln(x))^0 dx = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1},$$

cela entraine que v_k est donné pour tout $k \in \mathbb{N}$ par :

$$v_k = \left(-\frac{1}{p+1}\right)^k \times \frac{1}{p+1} = \frac{(-1)^k}{(p+1)^{k+1}}.$$

Dès lors, on obtient par définition de v_k que, pour tous $p, k \in \mathbb{N}$:

$$K_{p,k} = \frac{(-1)^k k!}{(p+1)^{k+1}}.$$

Mais comme $u_n = \frac{K_{n,n}}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il s'ensuit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1} n!}.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{u_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.}$$

(c) Montrons que la série $\sum u_n$ converge. Pour tout $n \geq 1$, on voit d'après la question précédente que :

$$|u_n| = \left|\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}\right| = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Comme la série de Riemann $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2}$ converge, la série $\sum_{n\geq 2} |u_n|$ converge d'après le critère de comparaison des séries à termes positifs, et donc la série $\sum_{n\geq 1} |u_n|$ converge aussi. En particulier, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge absolument, d'où l'on déduit que :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geq 1} u_n \text{ converge.}}$$

(4) (a) Montrons que, pour tout $x \in [-e^{-1}, 0]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}.$$

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n en 0 appliquée à une fonction h de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $[-e^{-1}, 0]$, on voit que, pour tout $x \in [-e^{-1}, 0]$:

$$\left| h(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{h^{(k)}(0)x^k}{k!} \right| \leq \frac{M_{n+1}|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

où M_{n+1} est un majorant de la valeur absolue de la dérivée $(n+1)$-ème de la fonction h sur l'intervalle $[-e^{-1}, 0]$. En particulier, on obtient si $h = \exp$ que, pour tout $x \in [-e^{-1}, 0]$:

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{M_{n+1}|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

car $h^{(0)} = ... = h^{(n)}(0) = e^0 = 1$. Comme $h^{(n+1)} = \exp$, on trouve que $M_{n+1} = 1$ est bien un majorant de $h^{(n+1)}$ sur l'intervalle $[-e^{-1}, 0]$. Dès lors, ceci nous donne que, pour tout $x \in [-e^{-1}, 0]$:

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Mais comme $|x|^{n+1} \leq e^{-(n+1)}$ pour tout $x \in [-e^{-1}, 0]$, on en déduit que, pour tout $x \in [-e^{-1}, 0]$:

$$\boxed{\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}.}$$

(b) Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|I - S_n| \leq \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}.$$

D'après la question (2)(b), on sait que $-e^{-1} \leq y\ln(y) \leq 0$ pour tout $y \in]0,1]$, et donc la fonction f est à valeurs dans $[-e^{-1}, 0]$. Dès lors, si l'on remplace x par $y\ln(y)$ dans l'inégalité de la question précédente, on trouve que, pour tout $y \in]0,1]$:

$$\left| e^{y\ln(y)} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(y\ln(y))^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}.$$

En particulier, cela signifie que, pour tout $y \in]0,1]$:

$$-\frac{1}{(n+1)!e^{n+1}} \leq y^y - \sum_{k=0}^{n} \frac{(y\ln(y))^k}{k!} \leq \frac{1}{(n+1)!e^{n+1}}.$$

Par linéarité et croissance de l'intégrale, on obtient que :

$$-\int_0^1 \frac{1}{(n+1)!e^{n+1}}dy \leq \int_0^1 y^y dy - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\int_0^1 (y\ln(y))^k dy \leq \int_0^1 \frac{1}{(n+1)!e^{n+1}}dx,$$

ce qui entraine que, pour tout entier $n \geq 0$:

$$-\frac{1}{(n+1)!e^{n+1}} \leq \int_0^1 y^y dy - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\int_0^1 (y\ln(y))^k dy \leq \frac{1}{(n+1)!e^{n+1}}.$$

Par définition des intégrales $I, u_0, u_1, ..., u_n$, il s'ensuit que, pour tout $n \geq 0$:

$$-\frac{1}{(n+1)!e^{n+1}} \leq I - \sum_{k=0}^{n} u_k \leq \frac{1}{(n+1)!e^{n+1}}.$$

Par conséquent, on en déduit par définition de S_n que, pour tout $n \geq 0$:

$$\boxed{|I - S_n| \leq \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}.}$$

(c) Montrons que : $I = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}$. D'après la question précédente, on sait que, pour tout $n \geq 0$:

$$0 \leq |I - S_n| \leq \frac{1}{(n+1)!e^{n+1}}.$$

Comme $(n+1)!$ et e^{n+1} tendent tous deux vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, le membre de droite de l'inégalité ci-dessus tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Par encadrement, ceci entraine que $I - S_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et donc :

$$I = \lim_{n\to+\infty} S_n.$$

Mais comme $u_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on voit que (S_n) est la suite des sommes partielles de la série $\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}}$. En particulier, cette suite de sommes partielles converge vers la somme de la série $\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}}$, et donc :

$$I = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}}.$$

Si l'on effectue le changement d'indice $n = k+1$ dans la somme ci-dessus, on en déduit par linéarité de la somme que :

$$\boxed{I = -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}.}$$

Corrigé de l'exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f_n(x) = 1 - x - x^n$.

(1) Montrons que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue x admet une unique solution, notée u_n. Pour ce faire, fixons un entier $n > 0$. Par définition, la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que polynôme et de plus, on a pour tout $x \geq 0$:

$$f_n'(x) = -1 - nx^{n-1} < 0.$$

En particulier, la fonction f_n est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, et donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $f_n(\mathbb{R}_+)$ d'après le théorème de la bijection. Comme $f_n(0) = 1$ et que $f_n(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$, on voit que $f_n(\mathbb{R}_+) =]-\infty, 1]$, et donc f_n est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $]-\infty, 1]$. Mais comme 0 appartient à $]-\infty, 1]$, le réel 0 admet un unique antécédent par f_n. En d'autres termes, cela signifie que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\text{l'équation } f_n(x) = 0 \text{ admet une unique solution, notée } u_n.}$$

(2) (a) Vérifions que u_n appartient à $]0, 1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Pour ce faire, on peut remarquer que $f_n(0) = 1$ et $f_n(1) = 1 - 1 - 1^n = -1$. Comme $u_n \geq 0$ par définition et que $f_n(u_n) = 0$, on voit que $u_n \neq 0$, et donc $u_n > 0$. De plus, comme f_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ d'après la question précédente, on constate que $f_n(u_n) = 0 > -1 = f_n(1)$, ce qui entraine que $u_n < 1$. Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{u_n \text{ appartient à }]0, 1[.}$$

(b) Déterminons tout d'abord le signe de $f_{n+1}(u_n)$. Par construction, on voit que :

$$f_{n+1}(u_n) = 1 - u_n - u_n^{n+1}.$$

Comme $0 < u_n < 1$ d'après la question précédente, on obtient que $u_n^{n+1} < u_n^n$, ce qui entraine que :

$$f_{n+1}(u_n) = 1 - u_n - u_n^{n+1} > 1 - u_n - u_n^n = f_n(u_n).$$

Mais comme $f_n(u_n) = 0$ par construction, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{f_{n+1}(u_n) > 0.}$$

A présent, établissons que la suite (u_n) est croissante. D'après ce qui précède, on sait que $f_{n+1}(u_n) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ par construction, ceci entraine que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_{n+1}(u_n) > f_{n+1}(u_{n+1}).$$

Mais comme la fonction f_{n+1} est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ d'après la question (1), il s'ensuit que $u_n < u_{n+1}$. Mais comme ceci est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$$

(c) Montrons que la suite (u_n) converge et que sa limite appartient à $[0, 1]$. D'après les questions $(2)(a)$ et $(2)(b)$, la suite (u_n) est croissante et majorée, et donc elle converge en vertu du théorème de la limite monotone. De plus, comme $0 < u_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ d'après la question $(2)(a)$, on obtient par passage à la limite dans les inégalités que :

$$0 \leq \lim_{n \to +\infty} u_n \leq 1.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge et sa limite appartient à } [0, 1].}$$

(d) Montrons que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$. Pour ce faire, on raisonne par l'absurde, on pose $l = \lim_{n \to +\infty} u_n$ et on suppose que $l \neq 1$. Comme l appartient à $[0, 1]$ d'après la question précédente, on voit qu'en fait $0 \leq l < 1$. De plus, comme la suite (u_n) est croissante, on constate que $0 \leq u_n \leq l$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En particulier, ceci nous donne que $0 \leq u_n^n \leq l^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $|l| < 1$, la suite géométrique (l^n) converge vers 0, et donc (u_n^n) converge vers 0 par encadrement. Dès lors, partant du fait que $f_n(u_n) = 1 - u_n - u_n^n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient par passage à la limite dans cette égalité que $1 - l - 0 = 0$, ce qui entraine que $l = 1$, mais ceci est impossible par hypothèse. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers } 1.}$$

(3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = 1 - u_n$.

(a) Justifions tout d'abord que $v_n > 0$. Comme $0 < u_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ d'après la question $(2)(a)$, on voit que $-1 < -u_n < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et donc $0 < 1 - u_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Mais comme $v_n = 1 - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{v_n > 0.}$$

A présent, montrons que : $\ln(v_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} -nv_n$. Partant du fait que $v_n = 1 - u_n$ et $f_n(u_n) = 1 - u_n - u_n^n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient que $v_n - u_n^n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Dès lors, on trouve en passant au logarithme que $\ln(v_n) = n \ln(u_n)$, et donc on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\ln(v_n) = n \ln(1 - v_n).$$

Comme (u_n) converge vers 1 et que $-v_n = -1 + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la suite $(-v_n)$ converge vers 0. Dès lors, comme $\ln(1 + x) \underset{x \to 0}{\sim} x$, il s'ensuit par substitution que :

$$\ln(1 - v_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} -v_n.$$

Par produit, ceci entraine que :

$$\ln(v_n) = n \ln(1 - v_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} -nv_n.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\ln(v_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} -nv_n.}$$

(b) Etablissons tout d'abord que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)} = 0.$$

Comme $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -nv_n$ d'après la question précédente, cela signifie que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-\ln(v_n)}{nv_n} = 1.$$

Comme la fonction ln est continue en 1 et que $\ln(1) = 0$, on a par composition des limites que :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right) = \ln(1) = 0.$$

En outre, comme (u_n) converge vers 1 et que $v_n = 1 - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la suite (v_n) converge vers 0. Dès lors, comme $\ln(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers 0, on trouve aussi par composition des limites que :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(v_n) = -\infty.$$

En particulier, ceci nous donne que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{-\ln(v_n)} = 0.$$

Par produit des limites, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)} = 0.}$$

Montrons ensuite que : $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(n)$. D'après la première partie de la question, on sait que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)} = 0.$$

D'après les propriétés du logarithme, ceci nous donne que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(-\ln(v_n)) - \ln(n) - \ln(v_n)}{-\ln(v_n)} = 0,$$

ce que l'on peut réarranger sous la forme suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(|\ln(v_n)|)}{\ln(v_n)} + \frac{\ln(n)}{\ln(v_n)} + 1 = 0. \quad (1)$$

Comme la suite (v_n) converge vers 0 d'après le raisonnement de la question $(3)(a)$ et que la fonction ln tend vers $-\infty$ en 0, on obtient par composition des limites que la suite $(|\ln(v_n)|)$ tend vers $+\infty$. Dès lors, comme $\ln(x) = o(x)$ au voisinage de $+\infty$ par croissances comparées, on trouve par substitution que :

$$\ln(|\ln(v_n)|) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\ln(v_n)\right).$$

En d'autres termes, cela signifie que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(|\ln(v_n)|)}{\ln(v_n)} = 0. \quad (2)$$

En effectuant la différence des limites (1) et (2), on trouve que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{\ln(v_n)} + 1 = 0,$$

ce que l'on peut réécrire sous la forme suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-\ln(n)}{\ln(v_n)} = 1.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(n).}$$

(c) Montrons que : $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$. Comme $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -nv_n$ d'après la question (3)(a) et que $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(n)$ d'après la question (3)(b), on obtient que :

$$-\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -nv_n.$$

En particulier, ceci nous donne que $-\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -nv_n$, et donc on obtient en divisant par n que :

$$\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}.}$$

(4) Déterminons tout d'abord la nature de la série $\sum v_n$. Plus précisément, on va montrer qu'elle diverge. Pour ce faire, on raisonne par l'absurde et on suppose que $\sum v_n$ converge. D'après la question précédente, on sait que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$, ce qui entraine que :

$$\frac{\frac{1}{n}}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{\ln(n)}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(n)}.$$

Comme ln tend vers $+\infty$ en $+\infty$, on voit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0.$$

En particulier, ceci entraine qu'au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(v_n\right).$$

Comme la série $\sum v_n$ converge par hypothèse et qu'elle est à termes positifs d'après la question (3)(a), il s'ensuit d'après le critère de négligeabilité pour les séries que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ converge, ce qui est impossible. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la série } \sum v_n \text{ diverge.}}$$

A présent, déterminons la nature de la série $\sum v_n^2$. Toujours d'après la question précédente, on sait que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$, ce qui entraine par produit que :

$$n^{3/2}v_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{3/2}\frac{\ln^2(n)}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln^2(n)}{n^{1/2}}.$$

Comme le terme de droite dans la succession d'équivalences ci-dessus tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ par croissances comparées, on obtient que :

$$\lim_{n\to+\infty} n^{3/2}v_n^2 = 0.$$

En particulier, ceci entraine qu'au voisinage de $+\infty$:

$$v_n^2 \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (car $3/2 > 1$) et qu'elle est à termes positifs, il s'ensuit d'après le critère de négligeabilité pour les séries que :

$$\boxed{\text{la série } \sum v_n^2 \text{ converge.}}$$

Corrigé du problème 1. On désigne par J l'intervalle $]-1,+\infty[$. Dans ce problème, on se propose d'étudier l'application f définie pour tout $x \in J$ par :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}dt.$$

(1) **<u>Préliminaires :</u>**

(a) Justifions la convergence des séries $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$, $\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^2}$ et $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2}$. Tout d'abord, on peut remarquer que la première série est la série de Riemann de paramètre 2, qui converge d'après le cours. Pour ce qui est de la deuxième série, on voit qu'il s'agit d'une série à termes positifs. Comme $k>0$, on obtient que $2k+1\geq k>0$ et donc $(2k+1)^2\geq k^2$, ce qui entraine que :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad 0\leq \frac{1}{(2k+1)^2}\leq\frac{1}{k^2}.$$

Comme la série $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2}$, il s'ensuit que la série $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{(2k+1)^2}$ converge d'après le critère de comparaison des séries à termes positifs, et donc la série $\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^2}$ converge aussi. Enfin, la dernière série converge absolument car la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge et $|\frac{(-1)^n}{n^2}|=\frac{1}{n^2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. En particulier, la série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2}$ converge. Par conséquent :

$$\boxed{\text{les séries } \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2},\ \sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^2},\ \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2} \text{ convergent.}}$$

(b) En admettant que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, montrons que : $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$. Pour ce faire, on scinde la somme $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ en deux parties suivant la parité de n. Plus précisément :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} &= \sum_{n \text{ pair } >0}\frac{1}{n^2}+\sum_{n \text{ impair}}\frac{1}{n^2}\\ &= \sum_{n=2k,\ k\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=2k+1,\ k\in\mathbb{N}}\frac{1}{n^2}\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{4k^2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}.\end{aligned}$$

Par linéarité de la somme, il s'ensuit que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$, et donc :

$$\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Mais comme $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, on en déduit après calcul que :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.}$$

(c) Montrons que : $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}$. Pour ce faire, on procède comme précédemment, c'est-à-dire qu'on scinde la somme $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ en deux parties suivant la parité de n. Plus précisément :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} &= \sum_{n \text{ pair } >0}\frac{(-1)^n}{n^2}+\sum_{n \text{ impair}}\frac{(-1)^n}{n^2}\\ &= \sum_{n=2k,\ k\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^n}{n^2}+\sum_{n=2k+1,\ k\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^n}{n^2}\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^2}+\sum_{k=1}^{+\infty}-\frac{1}{(2k+1)^2}.\end{aligned}$$

Par linéarité de la somme, il s'ensuit que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$, et donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\frac{\pi^2}{4\times 6}-\frac{\pi^2}{8}.$$

Dès lors, on en déduit après calcul que :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.}$$

(2) **Éléments d'étude de f :**

(a) Justifions, pour tout $x \in J$, la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$. Pour ce faire, on pose $g(t) = \frac{t^x}{1+t}$ pour tout $t \in]0,1]$. Alors on voit que g est définie, continue et positive sur $]0,1]$. De plus, comme $1+t \geq 1$ pour tout $t \in]0,1]$, on obtient que :

$$\forall t \in]0,1], \quad 0 \leq \frac{t^x}{1+t} \leq t^x.$$

Mais comme $x \in J$, on voit que $x > -1$ et $-x < 1$, et donc l'intégrale de Riemann $\int_0^1 t^x dt = \int_0^1 \frac{dt}{t^{-x}}$ converge. Dès lors, d'après le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives, on en déduit que :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt \text{ converge.}}$$

(b) Calculons les valeurs de $f(0)$ et de $f(1)$. Par définition de f, on a :

$$f(0) = \int_0^1 \frac{t^0}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2).$$

Toujours par définition de f et par linéarité de l'intégrale, on trouve que :

$$f(1) = \int_0^1 \frac{t}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{(1+t)-1}{1+t} dt = \int_0^1 dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt,$$

ce qui nous donne après calculs que : $f(1) = 1 - \ln(2)$, et donc :

$$\boxed{f(0) = \ln(2) \quad \text{et} \quad f(1) = 1 - \ln(2).}$$

(c) Montrons que, pour tout $x \in J$, on a : $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x+1}$. D'après la question (1)(a), on sait que :

$$\forall t \in]0,1], \quad 0 \leq \frac{t^x}{1+t} \leq t^x.$$

Comme l'intégrale impropre $\int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$ converge d'après la question (2)(a) et que l'intégrale de Riemann $\int_0^1 t^x dt$ converge car $x > -1$, on obtient par positivité et croissance de l'intégrale que :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^x dt.$$

Comme $x \in J$, on voit que $x + 1 > 0$, et donc :

$$\int_0^1 t^x dt = \left[\frac{t^{x+1}}{x+1}\right]_0^1 = \frac{1}{x+1} - \frac{0}{x+1} = \frac{1}{x+1}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\forall x \in J, \quad 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x+1}.}$$

Comme $\frac{1}{x+1}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes entraine que :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.}$$

(d) (i) Montrons que, pour tout $(x, y) \in J^2$ et tout $t \in]0, 1]$, on a : $x \leq y \Longrightarrow t^x \geq t^y$. Par définition, on sait que $t^x = e^{x \ln(t)}$ et $t^y = e^{y \ln(t)}$. Comme $t \in]0, 1]$, on voit que $\ln(t) \leq 0$, ce qui entraine que :

$$\begin{aligned} x \leq y \quad &\Longrightarrow \quad y - x \geq 0 \\ &\Longrightarrow \quad (y - x) \ln(t) \leq 0 \\ &\Longrightarrow \quad e^{(y-x) \ln(t)} \leq 1 \\ &\Longrightarrow \quad e^{y \ln(t) - x \ln(t)} \leq 1 \\ &\Longrightarrow \quad \frac{t^y}{t^x} \leq 1 \\ &\Longrightarrow \quad t^y \leq t^x \quad \text{car} \quad t^x > 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, on vient de montrer que :

$$\boxed{\forall (x, y) \in J^2, \quad \forall t \in]0, 1], \quad x \leq y \quad \Longrightarrow \quad t^x \geq t^y.}$$

(ii) D'après la question précédente, on sait que, pour tout $(x, y) \in J^2$ et tout $t \in]0, 1]$ tels que $x \leq y$, on a $t^y \leq t^x$. Comme $1 + t > 0$, il s'ensuit par division par $1 + t$ que :

$$\frac{t^y}{1 + t} \leq \frac{t^x}{1 + t}.$$

Comme les intégrales impropres $\int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$ et $\int_0^1 \frac{t^y}{1+t} dt$ convergent d'après la question $(2)(a)$, on obtient par croissance de l'intégrale que :

$$\int_0^1 \frac{t^y}{1 + t} dt \leq \int_0^1 \frac{t^x}{1 + t} dt,$$

d'où il s'ensuit que $f(y) \leq f(x)$ si $x \leq y$, et donc :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est décroissante sur } J.}$$

(e) Montrons que, pour tout $x \in J$, on a : $f(x) + f(x + 1) = \frac{1}{x+1}$. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned} f(x) + f(x + 1) \quad &= \quad \int_0^1 \frac{t^x}{1 + t} dt + \int_0^1 \frac{t^{x+1}}{1 + t} dt \\ &= \quad \int_0^1 \frac{t^x + t^{x+1}}{1 + t} dt \\ &= \quad \int_0^1 \frac{t^x (1 + t)}{1 + t} dt \\ &= \quad \int_0^1 t^x dt. \end{aligned}$$

D'après les calculs de la question $(2)(c)$, on sait que $\int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1}$, et donc :

$$\boxed{\forall x \in J, \quad f(x) + f(x + 1) = \frac{1}{x + 1}.}$$

(f) D'après la question précédente, on sait que, pour tout $x \in J$:

$$f(x) + f(x + 1) = \frac{1}{x + 1}.$$

Comme la fonction f est décroissante, on voit que $f(x + 1) \leq f(x)$, et donc :

$$\frac{1}{x + 1} \leq 2f(x).$$

Toujours par décroissance de f, on sait que $f(x + 1) \leq f(x)$, et donc :

$$\frac{1}{x + 1} \geq 2f(x + 1).$$

Si l'on effectue le changement de variable $y = x + 1$, on obtient que, pour tout $y > 0$:
$$\frac{1}{y} \geq 2f(y).$$
Dès lors, il s'ensuit que, pour tout $x > 0$, on a :
$$\frac{1}{x+1} \leq 2f(x) \leq \frac{1}{x},$$
ce qui entraine après division par $\frac{1}{x}$ que, pour tout $x > 0$:
$$\frac{x}{x+1} \leq \frac{f(x)}{\frac{1}{2x}} \leq 1.$$
Par des calculs simples, on trouve alors que, pour tout $x > 0$:
$$\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \leq \frac{f(x)}{\frac{1}{2x}} \leq 1.$$
Comme $1/x$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes entraine que :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{2x}} = 1.$$
Par conséquent, on en déduit que :
$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}.}$$

(g) Soit x un élément de J.

(i) Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :
$$\mathcal{P}(n) : \text{"}\forall x \in J,\ \ f(x) = (-1)^{n+1} f(n+1+x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1+x}\text{"}.$$
Tout d'abord, on voit que $\mathcal{P}(0)$ est vraie. En effet, comme $f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x+1}$, on a :
$$(-1)^{0+1} f(0+1+x) + \sum_{k=0}^{0} \frac{(-1)^k}{k+1+x} = -f(x+1) + \frac{1}{x+1} = f(x).$$
A présent, supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi. Par hypothèse de récurrence, on sait que, pour tout $x \in J$:
$$f(x) = (-1)^{n+1} f(n+1+x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1+x} \qquad (*).$$
Comme J est l'intervalle $]-1, +\infty[$, on voit que $x + n + 1$ appartient à J pour tout $x \in J$. Dès lors, on obtient avec la question $(2)(e)$ que, pour tout $x \in J$:
$$f(x+n+1) + f(x+n+2) = \frac{1}{x+n+2}.$$
Si l'on remplace $f(x+n+1)$ par $-f(x+n+2) + \frac{1}{x+n+2}$ dans la relation $(*)$, alors on trouve :
$$\begin{aligned}
f(x) &= (-1)^{n+1} f(n+1+x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1+x} \\
&= (-1)^{n+1} \left[-f(n+2+x) + \frac{1}{x+n+2}\right] + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1+x} \\
&= (-1)^{n+2} f(n+2+x) + \frac{(-1)^{n+1}}{n+2+x} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1+x} \\
&= (-1)^{n+2} f(n+2+x) + \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k+1+x},
\end{aligned}$$

d'où il s'ensuit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout ordre $n \in \mathbb{N}$, et donc pour tout $x \in J$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{f(x) = (-1)^{n+1} f(n+1+x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1+x}.}$$

(ii) D'après la question (2)(g)(i), on sait que, pour tout $x \in J$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(x) = (-1)^{n+1} f(n+1+x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1+x}.$$

Comme de plus $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$ d'après la question (2)(f), on voit que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. En particulier, pour x un réel fixé, la suite $(f(n+1+x))$ tend vers 0, et donc la suite $((-1)^{n+1}f(n+1+x))$ tend aussi vers 0 en tant que produit d'une suite bornée et d'une suite qui tend vers 0. Dès lors, la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1+x}\right)$ tend vers $f(x)$. Mais comme il s'agit de la suite des sommes partielles de la série $\sum \frac{(-1)^k}{k+1+x}$, il s'ensuit que :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k+1+x} \text{ converge et : } f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1+x}.}$$

(h) (i) Montrons que, pour tout $(x,y) \in J^2$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left|\frac{1}{k+1+x} - \frac{1}{k+1+y}\right| \leq \frac{|x-y|}{k^2}.$$

Par des calculs simples, on trouve que, pour tout $(x,y) \in J^2$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\left|\frac{1}{k+1+x} - \frac{1}{k+1+y}\right| = \left|\frac{(k+1+y)-(k+1+x)}{(k+1+x)(k+1+y)}\right| = \frac{|y-x|}{|(k+1+x)(k+1+y)|}.$$

Comme x, y appartiennent à J, on voit que $x, y \geq -1$, et donc $k+1+x, k+1+y \geq k$, ce qui entraine que :

$$\frac{1}{|(k+1+x)(k+1+y)|} \leq \frac{1}{k \times k}.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $(x,y) \in J^2$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\left|\frac{1}{k+1+x} - \frac{1}{k+1+y}\right| \leq \frac{|x-y|}{k^2}.}$$

(ii) D'après la question précédente, on sait que, pour tout $(x,y) \in J^2$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\left|\frac{1}{k+1+x} - \frac{1}{k+1+y}\right| \leq \frac{|x-y|}{k^2}.$$

D'après l'inégalité triangulaire, on trouve que, pour tout $(x,y) \in J^2$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1+x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1+y}\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{(-1)^k}{k+1+x} - \frac{(-1)^k}{k+1+y}\right)\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n}\left|\frac{(-1)^k}{k+1+x} - \frac{(-1)^k}{k+1+y}\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y}\right| + \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{1}{k+1+x} - \frac{1}{k+1+y}\right| \\
&\leq \left|\frac{(1+y)-(1+x)}{(1+x)(1+y)}\right| + \sum_{k=1}^{n} \frac{|x-y|}{k^2} \\
&\leq \frac{|y-x|}{|(1+x)(1+y)|} + \sum_{k=1}^{n} \frac{|x-y|}{k^2}.
\end{aligned}$$

Comme x, y appartiennent à J, on voit que $x, y > -1$, et donc $(1+x), (1+y) > 0$, ce qui entraine que $(1+x)(1+y) > 0$. Dès lors, par linéarité de la somme, il s'ensuit que, pour tout $(x, y) \in J^2$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1+x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1+y}\right| \leq \frac{|y-x|}{(1+x)(1+y)} + |y-x| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad (*).$$

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{k^2}$ converge d'après le cours, et que les séries $\sum \frac{(-1)^k}{k+1+x}$ et $\sum \frac{(-1)^k}{k+1+y}$ convergent d'après les questions précédentes, il s'ensuit par passage à la limite dans l'inégalité $(*)$ que :

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1+x} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1+y}\right| \leq \frac{|y-x|}{(1+x)(1+y)} + |y-x| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Mais comme $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, on en déduit que, pour tout $(x, y) \in J^2$:

$$\boxed{|f(x) - f(y)| \leq |x-y| \left(\frac{1}{(x+1)(y+1)} + \frac{\pi^2}{6}\right).}$$

(iii) Montrons que f est continue sur J. Soit $x \in J$ un réel fixé. D'après la question précédente, on sait que, pour tout $y \in J$, on a :

$$|f(x) - f(y)| \leq |x-y| \left(\frac{1}{(x+1)(y+1)} + \frac{\pi^2}{6}\right).$$

Quand y tend vers x, on voit que $|x-y|$ tend vers 0 et que $\frac{1}{(x+1)(y+1)}$ tend vers $\frac{1}{(x+1)^2}$, et donc $|x-y| \left(\frac{1}{(x+1)(y+1)} + \frac{\pi^2}{6}\right)$ tend vers 0. D'après le théorème d'encadrement, il s'ensuit que $|f(x) - f(y)|$ tend vers 0 quand y tend vers x, et donc :

$$f(y) \underset{y \to x}{\longrightarrow} f(x).$$

Dès lors, la fonction f est continue au point x, et ce pour tout $x \in J$. Par conséquent :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est continue sur } J.}$$

(i) Montrons que : $f(x) \underset{x \to -1}{\sim} \dfrac{1}{x+1}$. D'après la question $(2)(e)$, on sait que, pour tout $x \in J$:

$$f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x+1}.$$

D'après les questions $(2)(b)$ et $(2)(h)(iii)$, on sait que $f(0) = \ln(2)$ et que f est continue sur J, ce qui entraine qu'au voisinage de -1 :

$$f(x+1) = \ln(2) + o(1).$$

Dès lors, il s'ensuit qu'au voisinage de -1, on a :

$$f(x) = -f(x+1) + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+1} + \ln(2) + o(1).$$

Si l'on divise cette égalité par $\frac{1}{x+1}$, on obtient qu'au voisinage de -1 :

$$\frac{f(x)}{\frac{1}{x+1}} = 1 + \frac{\ln(2)}{\frac{1}{x+1}} + o\left(\frac{1}{\frac{1}{x+1}}\right) = 1 + \ln(2)(x+1) + o\left(x+1\right).$$

Dès lors, il s'ensuit que $\lim_{x \to -1} \dfrac{f(x)}{\frac{1}{x+1}} = 1$, ce qui entraine que :

$$\boxed{f(x) \underset{x \to -1}{\sim} \frac{1}{x+1}.}$$

Comme $\lim_{x \to -1} \dfrac{1}{x+1} = +\infty$, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty.}$$

(3) **Dérivabilité de f :**

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note g_k l'application de classe $\mathcal{C}^2$ de J dans $\mathbb{R}$, définie pour tout $x \in J$ par :

$$g_k(x) = \frac{(-1)^k}{k+1+x}.$$

(a) Montrons que, pour tout $(x,y) \in J^2$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$|g_k(x) - g_k(y) - (x-y)g'_k(x)| \leq \frac{|x-y|^2}{k^3}.$$

Par hypothèse, on sait que g_k est de classe $\mathcal{C}^2$ sur J. De plus, pour tout $x \in J$, on a :

$$|g''_k(x)| = \left|\frac{2(-1)^k}{(k+1+x)^3}\right| = \frac{2}{|(k+1+x)^3|}.$$

Comme x appartient à J, on voit que $x > -1$, et donc $(k+1+x) > k$, ce qui entraine que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in J$, on a :

$$|g''_k(x)| \leq \frac{2}{k^3}.$$

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, il s'ensuit que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in J$:

$$|g_k(x) - g_k(y) - (x-y)g'_k(x)| \leq \frac{2|x-y|^2}{2!.k^3}.$$

Dès lors, on en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in J$:

$$\boxed{|g_k(x) - g_k(y) - (x-y)g'_k(x)| \leq \frac{|x-y|^2}{k^3}.}$$

(b) Justifions la convergence des séries $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^3}$ et $\sum_{k\geq 0} g'_k(x)$ pour tout $x \in J$. Tout d'abord, on peut remarquer que la première série est la série de Riemann de paramètre 3, et qui converge donc. De plus, pour tout $x \in J$, on voit que :

$$|g'_k(x)| = \left|\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1+x)^2}\right| = \frac{1}{(k+1+x)^2}.$$

Comme x appartient à J, on voit que $x > -1$, et donc $(k+1+x) > k$, ce qui entraine que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in J$, on a :

$$|g'_k(x)| \leq \frac{1}{k^2}.$$

Comme la série de Riemann $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$ converge, il s'ensuit que la série $\sum |g'_k(x)|$ converge d'après le critère de comparaison des séries à termes positifs. Mais alors la série $\sum g'_k(x)$ converge absolument, et donc elle converge. Par conséquent, pour tout $x \in J$:

$$\boxed{\text{les séries } \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^3} \text{ et } \sum_{k\geq 0} g'_k(x) \text{ convergent.}}$$

(c) D'après la question (3)(a), on sait que, pour tout $(x,y) \in J^2$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$|g_k(x) - g_k(y) - (x-y)g'_k(x)| \leq \frac{|x-y|^2}{k^3}.$$

D'après l'inégalité triangulaire, on trouve que, pour tout $(x,y) \in J^2$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=0}^{n} g_k(y) - \sum_{k=0}^{n} g_k(x) - (y-x)\sum_{k=0}^{n} g'_k(x)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n} (g_k(y) - g_k(x) - (y-x)g'_k(x))\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} |g_k(y) - g_k(x) - (y-x)g'_k(x)| \\
&\leq |g_0(y) - g_0(x) - (y-x)g'_0(x)| + \sum_{k=1}^{n} \frac{|x-y|^2}{k^3}.
\end{aligned}$$

Or, par des calculs simples, on obtient que, pour tout $(x,y) \in J^2$:

$$\begin{aligned}
|g_0(y) - g_0(x) - (y-x)g_0'(x)| &= \left| \frac{1}{1+y} - \frac{1}{1+x} + (y-x)\frac{1}{(1+x)^2} \right| \\
&= \left| \frac{-(y-x)}{(1+x)(1+y)} + (y-x)\frac{1}{(1+x)^2} \right| \\
&= \left| \frac{(y-x)^2}{(1+x)^2(1+y)} \right|.
\end{aligned}$$

Dès lors, il s'ensuit par linéarité de la somme que, pour tout $(x,y) \in J^2$:

$$\left| \sum_{k=0}^{n} g_k(y) - \sum_{k=0}^{n} g_k(x) - (y-x)\sum_{k=0}^{n} g_k'(x) \right| \leq \left| \frac{(y-x)^2}{(1+x)^2(1+y)} \right| + (x-y)^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \quad (*).$$

Comme les séries $\sum \frac{1}{k^3}$, $\sum g_k(x)$, $\sum g_k(y)$ et $\sum g_k'(x)$ convergent d'après les questions précédentes, il s'ensuit par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'inégalité $(*)$ que :

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(y) - \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(y) - (y-x)\sum_{k=0}^{+\infty} g_k'(x) \right| \leq \frac{(y-x)^2}{(1+x)^2(1+y)} + (y-x)^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}.$$

Par définition des fonctions f et g_k, il s'ensuit que, pour tout $(x,y) \in J^2$:

$$\left| f(y) - f(x) - (y-x)\sum_{k=0}^{+\infty} g_k'(x) \right| \leq \frac{(y-x)^2}{(1+x)^2(1+y)} + (y-x)^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}.$$

Après division par $(x-y)$, on obtient que, pour tout $(x,y) \in J^2$ tel que $x \neq y$, on a :

$$\left| \frac{f(y)-f(x)}{y-x} - \sum_{k=0}^{+\infty} g_k'(x) \right| \leq \frac{|y-x|}{(1+x)^2(1+y)} + |y-x| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \quad (**).$$

Comme le membre de droite de l'inégalité $(**)$ tend vers 0 quand y tend vers x, il s'ensuit d'après le théorème des gendarmes que :

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} - \sum_{k=0}^{+\infty} g_k'(x) \underset{y \to x}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui signifie que, pour tout $x \in J$:

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \underset{y \to x}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty} g_k'(x).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{f \text{ est dérivable sur } J \text{ et de plus : } \forall x \in J, \quad f'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1+x)^2}.}$$

(d) Déterminons la valeur de $f'(0)$. D'après la question précédente, on sait que :

$$f'(0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1+0)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

D'après le résultat de la question (1)(c), on en déduit que :

$$\boxed{f'(0) = -\frac{\pi^2}{12}.}$$