Lycée Clemenceau **2024-25**
ECG 2

Devoir Maison de Mathématiques $n^o 2$:
Intégrales impropres - Algèbre linéaire

Exercice 1. Ecrire une fonction en Python qui, étant donné un entier $n \geq 1$, calcule et affiche la somme $S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} (-1)^j j^3$.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}}$. Ecrire une fonction en Python qui, étant donné un entier $n \geq 0$, calcule u_n.

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite vérifiant la condition $u_0 \geq 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}.$$

(1) Montrer que, pour tout $\in \mathbb{N}$, on a : $u_n \geq 1$.
(2) Etudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et donner sa limite l.
(3) Ecrire une fonction en Python qui, étant donnée une précision $\varepsilon > 0$ et une valeur initiale $u_0 \geq 1$, détermine le plus petit entier $n \geq 0$ tel que $|u_n - l| \leq \varepsilon$.

Exercice 4. Dans cet exercice, on se propose d'étudier la fonction f définie par la formule :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1 + x^2 e^{2t}}dt.$$

(1) (a) Justifier que, pour tout réel $a > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-at}dt$ converge et donner sa valeur.
(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Etablir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1 + x^2 e^{2t}}dt$.

(2) (a) Vérifier que, pour tout réel $x > 0$ et tout réel $t \geq 0$, on a : $xe^t \leq \sqrt{1 + x^2 e^{2t}} \leq xe^t + \dfrac{e^{-t}}{2x}$.
(b) Montrer que, pour tout réel $x > 0$, on a : $x \leq f(x) \leq x + \dfrac{1}{6x}$.
(c) Préciser alors la nature de la branche infinie de la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

(3) (a) A l'aide du changement de variable $u = xe^t$ que l'on justifiera, montrer que, pour tout $x > 0$:

$$f(x) = x^2 \int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1 + u^2}}{u^3}du.$$

(b) Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout $x > 0$, on a :

$$f'(x) = \frac{2f(x) - \sqrt{1 + x^2}}{x}.$$

(c) Justifier, pour tout $x > 0$, l'égalité suivante :

$$2f(x) = \sqrt{1 + x^2} + x^2 \int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1 + u^2}}.$$

(d) En déduire que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

(4) (a) Vérifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u\ln(u)du}{(1 + u^2)^{3/2}}$ converge.
(b) Justifier, pour tout $x > 0$, la formule suivante :

$$\int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1 + u^2}} = -\frac{\ln(x)}{\sqrt{1 + x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u\ln(u)du}{(1 + u^2)^{3/2}}.$$

(c) En déduire que $f'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -x\ln(x)$ et que $f(x) - \dfrac{1}{2} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\dfrac{x^2\ln(x)}{2}$.
(d) En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et préciser la valeur de $f'(0)$.

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel. Pour tout $g \in \mathcal{L}(E)$ et tout $P \in \mathbb{R}[x]$, de la forme $P : x \longmapsto a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$, on désigne par $P(g)$ l'endomorphisme de E donné par :

$$P(g) = a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 g + ... + a_n g^n.$$

On montre alors (et nous admettrons) que, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et tous $P, Q \in \mathbb{R}[x]$:

$$(\lambda P + \mu Q)(g) = \lambda P(g) + \mu Q(g) \quad \text{et} \quad (PQ)(g) = P(g) \circ Q(g) = Q(g) \circ P(g).$$

Dans cet exercice, on considère un endomorphisme f de E tel que $T(f) = 0$, où $T : x \longmapsto 8x^3 - 14x^2 + 7x - 1$.

(1) Montrer que T admet trois racines réelles α, β, γ que l'on déterminera, avec $\alpha < \beta < \gamma$.

(2) Soit φ l'application qui, à tout $P \in \mathbb{R}[x]$, associe le reste de la division euclidienne de P par T.
   (a) Rappeler le théorème sur la division euclidienne des polynômes.
   (b) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[x]$.
   (c) L'endomorphisme φ est-il injectif? surjectif? Justifier.

(3) On pose $L_1 : x \longmapsto (x-\alpha)(x-\beta)$, $L_2 : x \longmapsto (x-\beta)(x-\gamma)$ et $L_3 : x \longmapsto (x-\alpha)(x-\gamma)$.
   (a) Montrer que la famille (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique triplet $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\varphi(e_n) = a_n L_1 + b_n L_2 + c_n L_3,$$

   où $e_n : x \longmapsto x^n$. Exprimer a_n, b_n, c_n en fonction de n. Vérifier que $a_n = \dfrac{8}{3}$.
   (c) Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $f^n = a_n L_1(f) + b_n L_2(f) + c_n L_3(f)$.
   (d) Justifier la convergence des suites $(a_n), (b_n), (c_n)$. On note a, b, c leurs limites respectives.

(4) On pose $h = aL_1(f) + bL_2(f) + cL_3(f)$.
   (a) Montrer que $h = \dfrac{1}{3}\left(8f^2 - 6f + \mathrm{Id}_E\right)$.
   (b) Prouver enfin que h est un projecteur.

Exercice 6. On désigne par $\mathcal{B} = (i, j)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Dans cet exercice, on se propose de trouver tous les couples (u, v) d'endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ vérifiant les quatre assertions suivantes :

- (A_1) : $u^2 = -\mathrm{Id}$.
- (A_2) : $v \neq \mathrm{Id}$.
- (A_3) : $(v - \mathrm{Id})^2 = 0$.
- (A_4) : $\ker(u + v - \mathrm{Id}) \neq \{0\}$.

(1) On commence par étudier un exemple. Vérifier que les endomorphismes u, v canoniquement associés à U, V sont solutions du problème posé, où U et V sont données par :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On revient au cas général, et on considère un couple (u, v) solution du problème.

(2) (a) Montrer que u et v sont des isomorphismes et donner u^{-1}, v^{-1} en fonction de u, v, Id.
   (b) Calculer v^n comme combinaison linéaire de v et Id pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(3) (a) Etablir que : $\mathfrak{Im}(v - \mathrm{Id}) \subset \ker(v - \mathrm{Id})$.
   (b) En déduire, en raisonnant sur les dimensions, que : $\mathfrak{Im}(v - \mathrm{Id}) = \ker(v - \mathrm{Id})$.

(4) Montrer par l'absurde que : $\dim \ker(u + v - \mathrm{Id}) = 1$.

(5) Soit (e_2) une base de $\ker(u + v - \mathrm{Id})$ et posons : $e_1 = -u(e_2)$.
   (a) Montrer que (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ (*indication : raisonner par l'absurde*).
   (b) Donner les matrices de u et v dans cette base.

(6) Donner la conclusion de cet exercice.

Exercice 7. Soit E un espace vectoriel de dimension finie > 0. On dit qu'un endomorphisme f de E est nilpotent s'il existe un entier naturel $n > 0$ tel que $f^n = 0$. De plus, pour tout $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$, on définit *le crochet de Lie de f et g* par : $[f, g] = f \circ g - g \circ f$.

(1) (a) Montrer que : $\forall (f, g, h) \in \mathcal{L}(E)^3$, $[[f, g], h] + [[g, h], f] + [[h, f], g] = 0$.
   (b) Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $[f, g] = [g, f]$.

(2) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On souhaite démontrer dans cette question l'équivalence des propositions suivantes (i) : "il existe un projecteur $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f = [p, f]$" et (ii) : "$f^2 = 0$".
   (a) On suppose (i). Montrer successivement que $p \circ f \circ p = 0$, puis $f \circ p = 0$ et conclure.
   (b) On suppose (ii). En considérant une projection p d'image $\mathfrak{Im}(f)$, conclure.

(3) Soit g un élément fixé de $\mathcal{L}(E)$.
   (a) Montrer que l'application $\varphi_g : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$, $f \longmapsto [f, g]$ est linéaire.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, on a :

$$(\varphi_g)^n(f) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} g^k \circ f \circ g^{n-k}.$$

   (c) En déduire que, si g est nilpotent, alors φ_g est nilpotent.

(4) Résoudre l'équation $[f, g] = \mathrm{Id}_E$ d'inconnues $f, g \in \mathcal{L}(E)$.