Programme de colles en Mathématiques
ECG 2 (semaine 5 : 14 octobre 2024)

La colle débutera soit par une démonstration d'un résultat de cours (indiqué par un astérisque), soit par un exercice de début de colle. Le programme portera sur les espaces vectoriels, ainsi que sur les applications linéaires et les matrices, et plus particulièrement sur les points suivants:

(1) **Systèmes linéaires - Espaces vectoriels (révisions):**

Systèmes linéaires de n équations à p inconnues. Méthode du Pivot de Gauss.
Définition et propriétés de base d'un espace vectoriel.
Définition et propriétés des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel.
Définition et propriétés des familles libres, liées et génératrices de vecteurs.
Sous-espaces vectoriels engendrés par des familles de vecteurs.
Espaces vectoriels de dimension finie, bases d'un espace vectoriel.
Matrice-colonne des coordonnées d'un vecteur dans une base.
Théorème de la base incomplète et conséquences - Définition et propriétés de la dimension.
Espaces vectoriels de référence - Base canonique et dimension de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[x]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
Définition, propriétés et calcul pratique du rang d'une famille finie de vecteurs.
Définition et propriétés de la somme de deux sous-espaces vectoriels.
Somme directe de deux sous-espaces vectoriels - Formule de Grassmann, conséquences.
Définition et propriétés du supplémentaire d'un sous-espace vectoriel.
Définition et propriétés de la somme de r sous-espaces vectoriels.
Définition et propriétés de la somme directe de r sous-espaces vectoriels.

(2) **Applications linéaires et matrices (révisions et compléments):**

Définition et propriétés d'une application linéaire $f : E \longrightarrow F$.
Définition et propriétés du noyau et et de l'image d'une application linéaire.
Définition et propriétés du rang d'une application linéaire.
Méthode pratique de calcul du rang - Théorème du rang.
Opérations sur les applications linéaires (somme, produit par un scalaire, composition).
Savoir montrer que : $f \circ g = 0$ si et seulement si $\mathfrak{Im}(g) \subset \ker(f)$ **(*)**.
Endomorphismes commutants - Formule du binôme.
Applications linéaires bijectives, isomorphismes.
"La bijection réciproque d'une application linéaire bijective est linéaire ".
"Si $f : E \longrightarrow F$ est linéaire bijective, alors $\dim E = \dim F$ ".
"Si $\dim E = \dim F$, alors f est injective ssi elle est bijective ssi elle est surjective ".
Définition et propriétés de base des projecteurs et des symétries.
Définition de la matrice d'une application linéaire dans des bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$.
Définition de l'application linéaire canoniquement associée à une matrice.
Correspondance entre opérations sur les applications linéaires et sur les matrices.
Correspondance entre isomorphismes et matrices inversibles.
Définition et propriétés du rang d'une matrice.
"Le rang d'une application linéaire est égal à celui de sa matrice dans des bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ ".
"Une matrice carrée de taille n est inversible si et seulement si son rang est égal à n ".
Définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base $\mathcal{B}$.
Définition de la matrice de passage d'une base $\mathcal{B}$ vers une base $\mathcal{B}'$.
Formules de changement de base pour les vecteurs et pour les endomorphismes.
Définition et propriétés de base des matrices semblables.
Définition de la trace d'une matrice carrée - Linéarité de la trace **(*)**.
Formules "$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ " **(*)** et "$\mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}(A)$ " **(*)**.
"Deux matrices semblables ont même trace ".

Exercices de début de colle:

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système linéaire : $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 6 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 11 \\ -x & - & 5y & + & 6z & = & -7 \end{array}\right.$.

Exercice 2. Déterminer une base de l'espace vectoriel E dans chacun des cas suivants :

(1) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x + y - z = 0\}$,

(2) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x + 5y - 3z = -x - 4y + 2z = 0\}$,

Exercice 3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, où : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. Donner la matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$, et ce dans l'un des cas suivants :

(1) $E = \mathbb{R}^2$, $f : (x, y) \longmapsto (x + 3y, 2x + y)$, $\mathcal{B} = ((1, 1), (1, 2))$.

(2) $E = \mathbb{R}_n[x]$, $f : P \longmapsto P - P'$, $\mathcal{B}$ =base canonique.