Lycée Clemenceau **2024-25**
ECG 2

Corrigé du Devoir Maison de Mathématiques $n^o 2$

Corrigé de l'exercice 1. Pour écrire une fonction en Python qui, étant donné un entier $n \geq 1$, calcule et affiche la somme $S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} (-1)^j j^3$, on procèdera avec deux boucles `for` comme suit :

```
def somme(n):
    s=0
    for i in range(1,n+1):
        for j in range(1,i+1):
            s=s+((-1)**j)*(j**3)
    return s
```

Corrigé de l'exercice 2. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}}$. Pour écrire une fonction en Python qui, étant donné un entier $n \geq 0$, calcule u_n, on va utiliser une fonction récursive comme suit :

```
import numpy as np

def suite(n):
    if n==0:
        return 2
    elif n==1:
        return 3
    else:
        return np.sqrt(suite(n-1)*suite(n-2))
```

Corrigé de l'exercice 3. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite vérifiant la condition $u_0 \geq 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}.$$

(1) Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout $\in \mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) : "u_n \geq 1".$$

Tout d'abord, on voit que $\mathcal{P}(0)$ est vraie car u_0 par hypothèse. A présent, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier $n \geq 0$, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vraie. Par hypothèse de récurrence, on sait que $u_n \geq 1$, ce qui entraine que $\frac{1}{u_n} \leq 1$, et donc :

$$u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n} \geq 2 - 1 = 1,$$

d'où il s'ensuit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout ordre $n \geq 0$. Par conséquent, on vient de montrer que :

$$\boxed{\forall n \geq 0, \;\; u_n \geq 1.}$$

(2) Etudions tout d'abord la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on trouve que :

$$u_{n+1} - u_n = 2 - \frac{1}{u_n} - u_n = -\frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{u_n} = -\frac{(u_n - 1)^2}{u_n}.$$

Comme $u_n \geq 1$ d'après la question précédente, on constate que $u_n > 0$, et donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$. Comme ceci est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, il s'ensuit que :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$

A présent, montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donnons sa limite. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 1, on en déduit avec le théorème de la limite monotone qu'elle converge vers un réel l. Reste à déterminer l. A noter que, comme $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$ pour tout $n \geq 0$ et que la suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers l, on obtient par passage à la limite dans les égalités que $l = 2 - \frac{1}{l}$, c'est-à-dire $l^2 - 2l + 1 = (l-1)^2 = 0$. En particulier, on voit que $l - 1 = 0$ et $l = 1$, et donc :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers 1.}}$$

(3) Ecrivons une fonction en Python qui, étant donnée une précision $\varepsilon > 0$ et une valeur initiale $u_0 \geq 1$, détermine le plus petit entier $n \geq 0$ tel que $|u_n - l| \leq \varepsilon$. Pour ce faire, on va procéder comme suit :

```
import numpy as np

def entier(x,e):
    n=0
    u=x
    while np.abs(u-1)>e:
        u=2-(1/u)
        n=n+1
    return n
```

Corrigé de l'exercice 4. Dans cet exercice, on se propose d'étudier la fonction f définie par la formule :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}dt.$$

(1) (a) Montrons que, pour tout réel $a > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-at}dt$ converge et donnons sa valeur. Pour tout réel $y > 0$, on voit par un calcul simple que :

$$\int_0^y e^{-at}dt = \left[-\frac{e^{-at}}{a}\right]_0^y = -\frac{e^{-ay}}{a} + \frac{e^0}{a} = -\frac{e^{-ay}}{a} + \frac{1}{a}.$$

Comme $a > 0$, il s'ensuit que e^{-ay} tend vers 0 quand y tend vers $+\infty$, et donc l'intégrale $\int_0^y e^{-at}dt$ tend vers $\frac{1}{a}$ quand y tend vers $+\infty$. Par conséquent, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} e^{-at}dt \text{ converge, et de plus : } \int_0^{+\infty} e^{-at}dt = \frac{1}{a}.}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Etablissons la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}dt$. Tout d'abord, on peut remarquer que la fonction $t \longmapsto e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}$ est définie et continue sur $[0,+\infty[$, puisqu'elle est obtenue par somme, racine et produit de fonctions continues, et elle est de plus positive sur $[0,+\infty[$. Dès lors, $\int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}dt$ est une intégrale d'une fonction positive, et ne présente qu'une impropreté en $+\infty$. De plus, comme l'exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, on trouve que $1 \leq e^{2t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, et donc pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}} \leq e^{-2t}\sqrt{e^{2t}+x^2e^{2t}} = e^{-2t}e^t\sqrt{1+x^2} = e^{-t}\sqrt{1+x^2}.$$

Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ converge d'après la question précédente, il s'ensuit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sqrt{1+x^2}e^{-t}dt$ converge par linéarité. Dès lors, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}dt$ converge d'après le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives, et donc :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}dt \text{ converge pour tout } x \in \mathbb{R}.}$$

(2) (a) Vérifions que, pour tout réel $x > 0$ et tout réel $t \geq 0$, on a : $xe^t \leq \sqrt{1+x^2e^{2t}} \leq xe^t + \frac{e^{-t}}{2x}$. Pour ce faire, on commence d'abord par montrer que $xe^t \leq \sqrt{1+x^2e^{2t}}$. Comme x, e^t sont > 0, on voit que $\sqrt{x^2e^{2t}} = xe^t$, et donc :

$$x^2e^{2t} \leq 1 + x^2e^t \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{x^2e^{2t}} \leq \sqrt{1+x^2e^t} \quad \Longrightarrow \quad xe^t \leq \sqrt{1+x^2e^t}.$$

A présent, montrons que $\sqrt{1+x^2e^{2t}} \leq xe^t + \frac{e^{-t}}{2x}$. Comme x, e^t, e^{-t} sont > 0, on voit que :

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x^2e^{2t}} \leq xe^t + \frac{e^{-t}}{2x} \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(\sqrt{1+x^2e^{2t}}\right)^2 \leq \left(xe^t + \frac{e^{-t}}{2x}\right)^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad 1 + x^2e^{2t} \leq x^2e^{2t} + 2xe^t\frac{e^{-t}}{2x} + \frac{e^{-2t}}{4x^2} \\
&\Longleftrightarrow \quad 1 + x^2e^{2t} \leq x^2e^{2t} + 1 + \frac{e^{-2t}}{4x^2} \\
&\Longleftrightarrow \quad 0 \leq \frac{e^{-2t}}{4x^2}.
\end{aligned}$$

Comme cette inégalité est trivialement vraie, il s'ensuit que l'inégalité de départ est aussi vraie, et donc $\sqrt{1+x^2e^{2t}} \leq xe^t + \frac{e^{-t}}{2x}$. Par conséquent, pour tous $x > 0$ et $t \geq 0$, on a :

$$\boxed{xe^t \leq \sqrt{1+x^2e^{2t}} \leq xe^t + \frac{e^{-t}}{2x}.}$$

(b) Montrons que, pour tout réel $x > 0$, on a : $x \leq f(x) \leq x + \frac{1}{6x}$. En multipliant l'encadrement de la question précédente par e^{-2t}, on obtient que, pour tous $x > 0$ et $t \geq 0$:

$$xe^{-t} \leq e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}} \leq xe^{-t} + \frac{e^{-3t}}{2x}.$$

Comme les intégrales $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ et $\int_0^{+\infty} e^{-3t}dt$ convergent d'après la question $(1)(a)$, on voit que les intégrales $\int_0^{+\infty} xe^{-t}dt$ et $\int_0^{+\infty}(xe^{-t} + \frac{e^{-3t}}{2x})dt$ convergent aussi par linéarité. Comme de plus l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}dt$ converge d'après la question $(1)(b)$, on obtient par croissance de l'intégrale que :

$$\int_0^{+\infty} xe^{-t}dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}dt \leq \int_0^{+\infty} \left(xe^{-t} + \frac{e^{-3t}}{2x}\right) dt.$$

Par définition de f et par linéarité de l'intégrale, il s'ensuit que, pour tout $x > 0$:

$$x\int_0^{+\infty} e^{-t}dt \leq f(x) \leq x\int_0^{+\infty} e^{-t}dt + \frac{1}{2x}\int_0^{+\infty} e^{-3t}dt.$$

Comme $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$ et $\int_0^{+\infty} e^{-3t}dt = \frac{1}{3}$ d'après la question $(1)(a)$, on en déduit que, pour tout réel $x > 0$:

$$\boxed{x \leq f(x) \leq x + \frac{1}{6x}.}$$

(c) Précisons la nature de la branche infinie de la courbe de f au voisinage de $+\infty$. D'après la question précédente, on sait que $0 \leq f(x) - x \leq \frac{1}{6x}$ pour tout $x > 0$. D'après le théorème des gendarmes, il s'ensuit que $f(x) - x$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, et donc :

$$\boxed{\text{la courbe de } f \text{ admet pour asymptote en } +\infty \text{ la droite d'équation : } y = x.}$$

(3) (a) A l'aide du changement de variable $u = xe^t$ que l'on justifiera, montrons que, pour tout $x > 0$:

$$f(x) = x^2\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}du.$$

Fixons un réel $x > 0$ et posons $u = xe^t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors la fonction $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ définit une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$, puisqu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ et que sa bijection réciproque est la fonction $u^{-1} : t \longmapsto \frac{\ln(t)}{x}$, qui est elle aussi de classe $\mathcal{C}^1$. Dès lors, on peut effectuer le changement de variable $u = xe^t$. Remarquons qu'alors $du = xe^tdt$, que u tend vers x quand t tend vers 0 et que u tend vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$. D'après le théorème sur le changement de variable, on trouve alors que :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-3t}}{x}\sqrt{1+x^2e^{2t}}xe^tdt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{xe^{3t}}\sqrt{1+(xe^t)^2}xe^tdt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(xe^t)^3}\sqrt{1+(xe^t)^2}xe^tdt \\
&= \int_x^{+\infty} \frac{x^2}{u^3}\sqrt{1+u^2}du
\end{aligned}$$

Par linéarité de l'intégrale, on en déduit que, pour tout $x > 0$:

$$\boxed{f(x) = x^2\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}du.}$$

(b) Montrons que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et que, pour tout $x>0$, on a :

$$f'(x)=\frac{2f(x)-\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

Pour ce faire, considérons l'application h définie pour tout $x>0$ par :

$$h(x)=\int_x^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}du.$$

D'après la relation de Chasles, on voit que, pour tout $x>0$:

$$h(x)=\int_x^1\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}du+\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}du=-\int_1^x\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}du+\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}du.$$

Comme la fonction $h : x\longmapsto\int_1^x\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}du$ est la primitive qui s'annule en 1 de la fonction $x\longmapsto\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^3}$, laquelle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Dès lors, comme $g=-h+K$, où K est la constante $\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}du$, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme combinaison linéaire de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Mais comme $x\longmapsto x^2$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, pour tout $x>0$, on a :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(x^2(-h(x)+K)\right)'\\
&= 2x(-h(x)+K)+x^2(-h'(x))\\
&= 2x\left(-\int_1^x\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}du+\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}du\right)-x^2\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^3}\\
&= 2x\int_x^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}du-x^2\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^3}\\
&= \frac{2}{x}x^2\int_x^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}du-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\\
&= \frac{2}{x}f(x)-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\\
&= \frac{2f(x)-\sqrt{1+x^2}}{x}.
\end{aligned}$$

Dès lors, on vient de montrer que :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et : } \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad f'(x)=\frac{2f(x)-\sqrt{1+x^2}}{x}.}$$

(c) Justifions, pour tout $x>0$, l'égalité suivante :

$$2f(x)=\sqrt{1+x^2}+x^2\int_x^{+\infty}\frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}.$$

Pour ce faire, on part du fait que, d'après la question $(3)(a)$, on a pour tout $x>0$:

$$f(x)=x^2\int_x^{+\infty}\frac{\sqrt{1+t^2}}{t^3}dt.$$

Soit y un réel $>x$ fixé, et posons : $u(t)=\sqrt{1+t^2}$ et $v(t)=-\frac{1}{2t^2}$. Alors les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et de plus : $u'(t)=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ et $v'(t)=\frac{1}{t^3}$. Par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned}
\int_x^y\frac{\sqrt{1+t^2}}{t^3}dt &= \int_x^y u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_x^y-\int_x^y u'(t)v(t)dt\\
&= \left[-\frac{\sqrt{1+t^2}}{2t^2}\right]_x^y-\int_x^y-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\frac{1}{2t^2}dt,
\end{aligned}$$

ce qui nous donne après simplification et par linéarité de l'intégrale que :

$$\int_x^y\frac{\sqrt{1+t^2}}{t^3}dt=\frac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2}-\frac{\sqrt{1+y^2}}{2y^2}+\frac{1}{2}\int_x^y\frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}}dt.$$

Comme $1+y^2 \underset{y\to+\infty}{\sim} y^2$, il s'ensuit que $\sqrt{1+y^2} \underset{y\to+\infty}{\sim} y$, et donc :

$$\frac{\sqrt{1+y^2}}{2y^2} \underset{y\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2y}.$$

En particulier, on voit que $\frac{\sqrt{1+y^2}}{2y^2}$ tend vers 0 quand y tend vers $+\infty$. De plus, comme l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+t^2}}{t^3}dt$ converge d'après la question (3)(a), la fonction $y \longmapsto \int_x^y \frac{\sqrt{1+t^2}}{t^3}dt$ admet une limite finie quand y tend vers $+\infty$. En particulier, d'après la relation ci-dessus, la fonction $y \longmapsto \int_x^y \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}}dt$ admet une limite finie quand y tend vers $+\infty$, et de plus on obtient par passage à la limite que :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+t^2}}{t^3}dt = \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2} + \frac{1}{2}\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}}.$$

En multipliant par x^2, il s'ensuit que, pour tout $x>0$:

$$2x^2\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+t^2}}{t^3}dt = \sqrt{1+x^2} + x^2\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}}.$$

Par conséquent, on en déduit d'après la formule de la question (3)(a) que, pour tout $x>0$:

$$\boxed{2f(x) = \sqrt{1+x^2} + x^2\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}}.}$$

(d) Montrons que f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. D'après les questions (3)(a) et (3)(b), on trouve que, pour tout $x>0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2f(x)-\sqrt{1+x^2}}{x} \\ &= \frac{\sqrt{1+x^2}+x^2\int_x^{+\infty}\frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}} - \sqrt{1+x^2}}{x} \\ &= x\int_x^{+\infty}\frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}}. \end{aligned}$$

Comme la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}$ est continue, positive et non identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+^*$, il s'ensuit par stricte positivité de l'intégrale que :

$$\int_x^{+\infty}\frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}} > 0,$$

d'où l'on déduit que $f'(x)>0$ pour tout $x>0$, et donc :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est strictement croissante sur }]0,+\infty[.}$$

(4) (a) Vérifions que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{u\ln(u)du}{(1+u^2)^{3/2}}$ converge. Tout d'abord, on peut remarquer que la fonction $h : u \longmapsto \frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}}$ est bien définie et continue sur $]0,+\infty[$. Comme de plus $u\ln(u)$ tend vers 0 quand u tend vers 0 par croissance comparée, on voit que $h(u)$ tend vers 0 quand u tend vers 0. Dès lors, h est prolongeable par continuité en 0 et l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{u\ln(u)du}{(1+u^2)^{3/2}}$ est faussement impropre en 0. En particulier, l'intégrale $\int_0^1 \frac{u\ln(u)du}{(1+u^2)^{3/2}}$ converge. Etudions maintenant l'impropreté en $+\infty$. Comme $u^2+1 \underset{u\to+\infty}{\sim} u^2$, on trouve d'après les règles de calcul des équivalents que :

$$\frac{h(u)}{\frac{1}{u^{3/2}}} = \frac{\frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}}}{\frac{1}{u^{3/2}}} = \frac{u^{1+\frac{3}{2}}\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}} \underset{u\to+\infty}{\sim} \frac{u^{5/2}\ln(u)}{(u^2)^{3/2}} \underset{u\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(u)}{u^{1/2}}.$$

Comme $\frac{\ln(u)}{u^{1/2}}$ tend vers 0 quand u tend vers $+\infty$ par croissance comparée, il s'ensuit que $h(u)u^{3/2}$ tend vers 0 quand u tend vers $+\infty$, et donc :

$$h(u) \underset{u\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{u^{3/2}}\right).$$

Comme l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty}\frac{du}{u^{3/2}}$ converge et que $\frac{1}{u^{3/2}}>0$ pour tout $u\geq 1$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} h(u)du$ converge d'après le critère de négligeabilité des intégrales de fonctions positives.

Mais comme l'intégrale $\int_0^1 \frac{u\ln(u)du}{(1+u^2)^{3/2}}$ converge aussi, on en déduit avec la relation de Chasles que :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{u\ln(u)du}{(1+u^2)^{3/2}} \text{ converge.}}$$

(b) Justifions, pour tout $x>0$, la formule suivante :

$$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}} = -\frac{\ln(x)}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{t\ln(t)dt}{(1+t^2)^{3/2}}.$$

Fixons un réel $y>x$, et posons : $u(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ et $v(t) = \ln(t)$. Alors les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et de plus : $u'(t) = -\frac{t}{(1+t^2)^{3/2}}$ et $v'(t) = \frac{1}{t}$. Par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned}\int_x^y \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}} &= \int_x^y u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_x^y - \int_x^y u'(t)v(t)dt \\ &= \left[\frac{\ln(t)}{\sqrt{1+t^2}}\right]_x^y - \int_x^y -\frac{t}{(1+t^2)^{3/2}}\ln(t)dt,\end{aligned}$$

ce qui nous donne après simplification et par linéarité de l'intégrale que :

$$\int_x^y \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}} = -\frac{\ln(x)}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{\ln(y)}{\sqrt{1+y^2}} + \int_x^y \frac{t\ln(t)dt}{(1+t^2)^{3/2}}dt \quad (*).$$

Comme $1+y^2 \underset{y\to+\infty}{\sim} y^2$, il s'ensuit que $\sqrt{1+y^2} \underset{y\to+\infty}{\sim} y$, et donc :

$$\frac{\ln(y)}{\sqrt{1+y^2}} \underset{y\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(y)}{y}.$$

Comme $\frac{\ln(y)}{y}$ tend vers 0 quand y tend vers $+\infty$ par croissance comparée, il s'ensuit que $\frac{\ln(y)}{\sqrt{1+y^2}}$ tend vers 0 quand y tend vers $+\infty$. De plus, d'après la question précédente, on sait que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t\ln(t)dt}{(1+t^2)^{3/2}}$ converge, et donc l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{t\ln(t)dt}{(1+t^2)^{3/2}}$ converge aussi pour tout $x>0$. Dès lors, la relation $(*)$ entraine que la fonction $y \longmapsto \int_x^y \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}}$ admet une limite finie quand y tend vers $+\infty$. De plus, par passage à la limite quand y tend vers $+\infty$ dans la relation $(*)$, on en déduit que, pour tout $x>0$:

$$\boxed{\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}} = -\frac{\ln(x)}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{t\ln(t)dt}{(1+t^2)^{3/2}}dt.}$$

(c) Montrons que $f'(x) \underset{x\to0^+}{\sim} -x\ln(x)$ et que $f(x) - \frac{1}{2} \underset{x\to0^+}{\sim} -\frac{x^2\ln(x)}{2}$. D'après la question précédente, on sait que, pour tout $x>0$:

$$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}} = -\frac{\ln(x)}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{t\ln(t)dt}{(1+t^2)^{3/2}}dt.$$

Si l'on divise cette égalité par $-\ln(x)$ pour $x>0$ et $x\neq1$, on trouve que :

$$\frac{\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}}}{-\ln(x)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{\int_x^{+\infty} \frac{t\ln(t)dt}{(1+t^2)^{3/2}}dt}{\ln(x)}.$$

Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t\ln(t)dt}{(1+t^2)^{3/2}}dt$ converge, il s'ensuit que $\int_x^{+\infty} \frac{t\ln(t)dt}{(1+t^2)^{3/2}}dt$ admet une limite finie quand x tend vers 0, et donc :

$$\lim_{x\to0} \frac{\int_x^{+\infty} \frac{t\ln(t)dt}{(1+t^2)^{3/2}}dt}{\ln(x)} = 0.$$

Dès lors, il vient que $\lim_{x\to0} \frac{\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}}}{-\ln(x)} = 1$, et donc :

$$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}} \underset{x\to0^+}{\sim} -\ln(x).$$

Mais comme $f'(x) = x\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}}$ d'après la question (3)(d), on en déduit que :

$$\boxed{f'(x) \underset{x\to0^+}{\sim} -x\ln(x).}$$

D'après la question (3)(*b*), on sait que $f'(x) = \frac{2f(x)-\sqrt{1+x^2}}{x}$, et donc pour tout $x > 0$:

$$2f(x) = \sqrt{1+x^2} + xf'(x).$$

D'après les règles de calcul des développements limités, on voit que $\sqrt{1+x^2} \underset{x\to 0^+}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Comme de plus $f'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -x\ln(x)$, on obtient que $f'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -x\ln(x) + o(x\ln(x))$, et donc on trouve qu'au voisinage de 0^+ :

$$\begin{aligned} 2f(x) &= \sqrt{1+x^2} + xf'(x) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) + x(-x\ln(x) + o(x\ln(x))) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x^2\ln(x) + o(x^2\ln(x)). \end{aligned}$$

Comme la fonction ln tend vers $-\infty$ en 0^+, on voit que $1 \underset{x\to 0^+}{=} o(\ln(x))$, ce qui entraine que $\frac{x^2}{2} \underset{x\to 0^+}{=} o(x^2\ln(x))$ et $x^2 \underset{x\to 0^+}{=} o(x^2\ln(x))$, et donc :

$$2f(x) \underset{x\to 0^+}{=} 1 - x^2\ln(x) + o(x^2\ln(x)).$$

Dès lors, il s'ensuit que $f(x) - \frac{1}{2} \underset{x\to 0^+}{=} -\frac{x^2\ln(x)}{2} + o(x^2\ln(x))$, et donc :

$$\boxed{f(x) - \frac{1}{2} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{x^2\ln(x)}{2}.}$$

(d) Montrons que f est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et précisons la valeur de $f'(0)$. Par définition de f, on voit que :

$$f(0) = \int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+0^2e^{2t}}dt = \int_0^{+\infty} e^{-2t}dt = I_2 = \frac{1}{2}.$$

D'après la question précédente, on sait que :

$$f(x) - \frac{1}{2} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{x^2\ln(x)}{2}.$$

Dès lors, comme $x^2\ln(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 par croissance comparée, il s'ensuit que $f(x) - \frac{1}{2}$ tend vers 0 quand x tend vers 0. Dès lors, $f(x)$ tend vers $\frac{1}{2} = f(0)$ quand x tend vers 0, et donc f est continue en 0. Mais comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ d'après les questions précédentes, f est continue sur $]0,+\infty[$, et donc f est en fait continue sur $[0,+\infty[$. De plus, comme $f'(x) \sim_{0^+} -x\ln(x)$ et que $x\ln(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 par croissance comparée, il s'ensuit que $f'(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0. Dès lors, comme f est continue sur $[0,+\infty[$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et que f' admet une limite finie en 0 (à savoir : 0), le théorème de prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ entraine que :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,+\infty[\text{ et de plus : } f'(0) = 0.}$$

Corrigé de l'exercice 5. Soit E un espace vectoriel. Pour tout $g \in \mathcal{L}(E)$ et tout $P \in \mathbb{R}[x]$, de la forme $P : x \longmapsto a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$, on désigne par $P(g)$ l'endomorphisme de E donné par :

$$P(g) = a_0\mathrm{Id}_E + a_1g + ... + a_ng^n.$$

On montre alors (et nous admettrons) que, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et tous $P, Q \in \mathbb{R}[x]$:

$$(\lambda P + \mu Q)(g) = \lambda P(g) + \mu Q(g) \quad \text{et} \quad (PQ)(g) = P(g) \circ Q(g) = Q(g) \circ P(g).$$

Dans cet exercice, on considère un endomorphisme f de E tel que $T(f) = 0$, où $T : x \longmapsto 8x^3 - 14x^2 + 7x - 1$.

(1) Montrons que T admet trois racines réelles α, β, γ que l'on déterminera, avec $\alpha < \beta < \gamma$. Pour ce faire, on peut commencer par remarquer que 1 est racine de T, puisque :

$$T(1) = 8 - 14 + 7 - 1 = 0.$$

Comme 1 est racine de T, il existe des réels a, b, c tels que $T(x) = (x-1)(ax^2+bx+c)$. Par des calculs simples, on trouve que :

$$T(x) = (x-1)(ax^2+bx+c) = ax^3 + (-a+b)x^2 + (-b+c)x - c.$$

Comme $T(x) = 8x^3 - 14x^2 + 7x - 1$, on obtient après identification que :

$$a = 8, \quad -a+b = -14, \quad -b+c = 7, \quad -c = -1,$$

d'où il s'ensuit que $a = 8$, $b = -6$, $c = 1$, et donc :

$$T(x) = (x-1)(8x^2 - 6x + 1).$$

Comme le discriminant du trinôme $8x^2 - 6x + 1$ est égal à $\Delta = (-6)^2 - (4 \times 8 \times 1) = 36 - 32 = 4 > 0$, il s'ensuit que le polynôme $8x^2 - 6x + 1$ admet deux racines réelles, à savoir :

$$x_1 = \frac{6+2}{16} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{6-2}{16} = \frac{1}{4}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{T \text{ admet trois racines réelles } \alpha, \beta, \gamma, \text{ avec : } \alpha = \frac{1}{4},\ \beta = \frac{1}{2},\ \gamma = 1.}$$

(2) Soit φ l'application qui, à tout $P \in \mathbb{R}[x]$, associe le reste de la division euclidienne de P par T.

(a) Rappelons le théorème sur la division euclidienne des polynômes. Ce dernier affirme que :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Etant donnés deux polynômes } A, B \in \mathbb{R}[x], \text{ avec } B \neq 0, \\ \text{il existe un unique couple de polynômes } (Q,R) \in \mathbb{R}[x]^2 \\ \text{tels que : } A = BQ + R \text{ et } \deg(R) < \deg(B). \end{array}}$$

(b) Montrons que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[x]$. Comme φ est l'application qui, à tout $P \in \mathbb{R}[x]$, associe le reste de la division euclidienne de P par T, on voit que $\varphi(P)$ appartient à $\mathbb{R}[x]$ pour tout $P \in \mathbb{R}[x]$. Dès lors, pour montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[x]$, il suffit de vérifier que φ est bien linéaire. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et soient $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[x]$. D'après le théorème sur la division euclidienne des polynômes, il existe un unique couple $(Q_1, R_1) \in \mathbb{R}[x]^2$ et un unique couple $(Q_2, R_2) \in \mathbb{R}[x]^2$ tels que :

$$P_1 = TQ_1 + R_1 \ \text{ avec } \ \deg(R_1) < 3 \quad \text{et} \quad P_2 = TQ_2 + R_2 \ \text{ avec } \ \deg(R_2) < 3.$$

Par définition de φ, on voit que $\varphi(P_1) = R_1$ et $\varphi(P_2) = R_2$, et que de plus :

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = T\left[\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2\right] + \left[\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2\right].$$

Mais comme R_1, R_2 sont de degré < 3, on voit que $\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2$ est de degré < 3. Par unicité de la division euclidienne, il s'ensuit que $\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2$ est le reste de la division euclidienne de $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$ par T, ce qui entraine que :

$$\varphi(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 = \lambda_1 \varphi(P_1) + \lambda_2 \varphi(P_2).$$

En particulier, on voit que l'application φ est linéaire, et donc :

$$\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}[x].}$$

(c) Déterminons si l'endomorphisme φ est injectif ou surjectif. Tout d'abord, on voit que φ n'est pas injectif. En effet, le reste de la division euclidienne de T par T est le polynôme nul, et donc $\varphi(T) = 0$ alors que $T \neq 0$. En particulier, le noyau de l'endomorphisme φ n'est pas réduit à zéro, et donc :

$$\boxed{\varphi \text{ n'est pas injectif.}}$$

De même, on voit que φ n'est pas surjectif. En effet, comme $\varphi(P)$ est le reste de la division euclidienne de P par T, on peut remarquer que $\varphi(P)$ est de degré < 3 pour tout $P \in \mathbb{R}[x]$. En particulier, le polynôme $x \longmapsto x^3$ n'appartient pas à $\mathfrak{Im}(\varphi)$, puisqu'il ne peut être le reste de la division euclidienne d'un polynôme P par T, et donc $\mathfrak{Im}(\varphi) \neq \mathbb{R}[x]$. Par conséquent :

$$\boxed{\varphi \text{ n'est pas surjectif.}}$$

(3) On pose $L_1 : x \longmapsto (x-\alpha)(x-\beta)$, $L_2 : x \longmapsto (x-\beta)(x-\gamma)$ et $L_3 : x \longmapsto (x-\alpha)(x-\gamma)$.

(a) Montrons que la famille (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{R}_2[x]$. Comme cette famille compte 3 éléments et que $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$, il suffit de montrer que (L_1, L_2, L_3) est une famille libre. Soient $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tels que $a_1 L_1 + a_2 L_2 + a_3 L_3 = 0$. Alors, on voit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$a_1(x-\alpha)(x-\beta) + a_2(x-\beta)(x-\gamma) + a_3(x-\alpha)(x-\gamma) = 0.$$

En particulier, si l'on remplace x par α, on trouve que :

$$a_2(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma) = 0.$$

Comme α, β, γ sont distinctes, il s'ensuit que $\alpha - \beta \neq 0$ et $\alpha - \gamma \neq 0$, ce qui entraine que $(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma) \neq 0$, et donc $a_2 = 0$. De même, si l'on remplace x par β, on obtient que :

$$a_3(\beta-\alpha)(\beta-\gamma) = 0.$$

Comme α, β, γ sont distinctes, il s'ensuit que $\beta - \alpha \neq 0$ et $\beta - \gamma \neq 0$, ce qui entraine que $(\beta - \alpha)(\beta - \gamma) \neq 0$, et donc $a_3 = 0$. Enfin, si l'on remplace x par γ, on trouve que :

$$a_1(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta) = 0.$$

Comme α, β, γ sont distinctes, il s'ensuit que $\gamma - \alpha \neq 0$ et $\gamma - \beta \neq 0$, ce qui entraine que $(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta) \neq 0$, et donc $a_1 = 0$. Par conséquent, on vient de montrer que $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, et donc la famille (L_1, L_2, L_3) est libre, ce qui entraine que :

$$\boxed{(L_1, L_2, L_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[x].}$$

(b) Montrons d'abord que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique triplet $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\varphi(e_n) = a_n L_1 + b_n L_2 + c_n L_3,$$

où $e_n : x \longmapsto x^n$. Par définition, le polynôme $\varphi(e_n)$ est le reste de la division euclidienne de e_n par T. Comme T est de degré 3, $\varphi(e_n)$ est un polynôme de degré ≤ 2, et donc il appartient à $\mathbb{R}_2[x]$. Mais comme (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{R}_2[x]$, il existe un unique triplet $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\boxed{\varphi(e_n) = a_n L_1 + b_n L_2 + c_n L_3.}$$

A présent, exprimons a_n, b_n, c_n en fonction de n et vérifions que $c_n = \frac{8}{3}$. Pour ce faire, on procède comme suit. Partant du théorème sur la division euclidienne des polynômes, on sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple $(Q_n, R_n) \in \mathbb{R}[x]^2$ tel que $e_n = Q_n T + R_n$ avec $\deg(R_n) < 3$. Comme $\varphi(e_n) = R_n$, on obtient que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $Q_n \in \mathbb{R}[x]$ tel que :

$$e_n = Q_n T + a_n L_1 + b_n L_2 + c_n L_3 \quad (*).$$

Comme $\gamma = 1$ est racine de T, L_2, L_3, on trouve avec l'égalité $(*)$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$e_n(1) = 1^n = Q_n(1)T(1) + a_n L_1(1) + b_n L_2(1) + c_n L_3(1) = a_n L_1(1).$$

Comme $\alpha = \frac{1}{4}$, $\beta = \frac{1}{2}$ et $\gamma = 1$, on obtient par définition de L_1 que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$1 = a_n(1 - \alpha)(1 - \beta) = a_n \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) = a_n \times \frac{3}{8},$$

d'où il s'ensuit que $a_n = \frac{8}{3}$. De même, comme β est racine de T, L_1, L_2, on trouve avec l'égalité $(*)$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$e_n(\beta) = \beta^n = Q_n(\beta)T(\beta) + a_n L_1(\beta) + b_n L_2(\beta) + c_n L_3(\beta) = c_n L_3(\beta).$$

Comme $\alpha = \frac{1}{4}$, $\beta = \frac{1}{2}$ et $\gamma = 1$, on obtient par définition de L_2 que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{2^n} = c_n(\beta - \alpha)(\beta - \gamma) = c_n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2} - 1\right) = c_n \times \frac{-1}{8},$$

d'où il s'ensuit que $c_n = \frac{-1}{2^{n-3}}$. Enfin, comme α est racine de T, L_1, L_3, on trouve avec l'égalité $(*)$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$e_n(\alpha) = \alpha^n = Q_n(\alpha)T(\alpha) + a_n L_1(\alpha) + b_n L_2(\alpha) + c_n L_3(\alpha) = b_n L_2(\alpha).$$

Comme $\alpha = \frac{1}{4}$, $\beta = \frac{1}{2}$ et $\gamma = 1$, on obtient par définition de L_2 que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{4^n} = b_n(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) = b_n \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4} - 1\right) = b_n \times \frac{3}{16},$$

d'où il s'ensuit que $b_n = \frac{1}{3.4^{n-4}}$. Par conséquent, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{a_n = \frac{8}{3}, \quad b_n = \frac{1}{3.4^{n-4}}, \quad c_n = \frac{-1}{2^{n-3}}.}$$

(c) Prouvons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $f^n = a_n L_1(f) + b_n L_2(f) + c_n L_3(f)$. D'après la question précédente, on sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $Q_n \in \mathbb{R}[x]$ tel que :

$$e_n = Q_n T + a_n L_1 + b_n L_2 + c_n L_3.$$

En particulier, ceci nous donne que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f^n = Q_n(f) \circ T(f) + a_n L_1(f) + b_n L_2(f) + c_n L_3(f).$$

Mais comme $T(f) = 0$ par définition, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{f^n = a_n L_1(f) + b_n L_2(f) + c_n L_3(f).}$$

(d) Justifions la convergence des suites $(a_n), (b_n), (c_n)$ (de limites respectives a, b, c). D'après la question (4)(b), on sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{8}{3}, \quad b_n = \frac{1}{3.4^{n-4}}, \quad c_n = \frac{-1}{2^{n-3}}.$$

Comme 2^{n-3} et 4^{n-4} tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, on en déduit que :

$$\boxed{(a_n), (b_n), (c_n) \text{ convergent et de plus : } a = \frac{8}{3}, \; b = 0, \; c = 0.}$$

(4) On pose $h = aL_1(f) + bL_2(f) + cL_3(f)$.

(a) Montrons que $h = \frac{1}{3}(8f^2 - 6f + \mathrm{Id}_E)$. Comme $L_1 : x \longmapsto (x - \alpha)(x - \beta)$, $\alpha = \frac{1}{4}$ et $\beta = \frac{1}{2}$, on obtient par des calculs simples que :

$$L_1 : x \longmapsto x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}.$$

D'après les résultats de la question précédente, on trouve alors que :

$$\begin{aligned} h &= aL_1(f) + bL_2(f) + cL_3(f) \\ &= \frac{8}{3}L_1(f) + 0L_2(f) + 0L_3(f) \\ &= \frac{1}{3}\left(8f^2 - 6f + \mathrm{Id}_E\right). \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{h = \frac{1}{3}\left(8f^2 - 6f + \mathrm{Id}_E\right).}$$

(b) Prouvons que h est un projecteur. Pour ce faire, on commence par remarquer que h est un endomorphisme de $\mathbb{R}[x]$, comme composée et combinaison linéaire d'endomorphismes de E. Reste donc à montrer que $h^2 = h$. Partant du fait que $T(f) = 8f^3 - 14f^2 + 7f - \mathrm{Id}_E = 0$ et que $T(x) = (x-1)(8x^2 - 6x + 1)$ d'après la question (1), on trouve que :

$$(f - \mathrm{Id}_E) \circ (8f^2 - 6f + \mathrm{Id}_E) = 0.$$

En divisant par 3, on obtient par définition de h que :

$$(f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{3}\left(8f^2 - 6f + \mathrm{Id}_E\right)\right) = (f - \mathrm{Id}_E) \circ h = 0,$$

d'où il s'ensuit que $f \circ h - h = 0$, et donc $f \circ h = h$ $(*)$. Si l'on recompose par f, alors on a :

$$f^2 \circ h = f \circ (f \circ h) = f \circ h = h \quad (**).$$

Dès lors, il s'ensuit avec les relations $(*)$ et $(**)$ que :

$$\begin{aligned} h^2 &= \left(\frac{1}{3}(8f^2 - 6f + \mathrm{Id}_E)\right) \circ h \\ &= \frac{1}{3}\left(8f^2 \circ h - 6f \circ h + \mathrm{Id}_E \circ h\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(8h - 6h + h\right) \quad = \quad h. \end{aligned}$$

Par conséquent, on voit que $h \in \mathcal{L}(E)$ et $h^2 = h$, et donc :

$$\boxed{h \text{ est un projecteur de } E.}$$

Corrigé de l'exercice 6. On désigne par $\mathcal{B} = (i, j)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Dans cet exercice, on se propose de trouver tous les couples (u, v) d'endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ vérifiant les quatre assertions suivantes :

- (A_1) : $u^2 = -\mathrm{Id}$.
- (A_2) : $v \neq \mathrm{Id}$.
- (A_3) : $(v - \mathrm{Id})^2 = 0$.
- (A_4) : $\ker(u + v - \mathrm{Id}) \neq \{0\}$.

(1) On commence par étudier un exemple. Vérifions que les endomorphismes u, v canoniquement associés à U, V sont solutions du problème posé, où U et V sont données par :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour ce faire, on commence par montrer la condition (A_1). Par un calcul simple, on trouve que :

$$U^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2.$$

Comme U^2 est la matrice de u^2 dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, il s'ensuit que :

$$(A_1) : u^2 = -\mathrm{Id}.$$

Vérifions maintenant la condition (A_2). Comme $V \neq I_2$ et que V est la matrice de v dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on voit que :

$$(A_2) : v \neq \mathrm{Id}.$$

A présent, montrons la condition (A_3). Par un calcul simple, on trouve que :

$$(V - I_2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Comme $(V - I_2)^2$ est la matrice de $(v - \mathrm{Id})^2$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, il s'ensuit que :

$$(A_3) : (v - \mathrm{Id})^2 = 0.$$

Enfin, vérifions la condition (A_4). Par des calculs simples, on obtient que :

$$U + V - I_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dès lors, on voit que $\mathrm{rg}(U + V - I_2) = 1$. Comme $U + V - I_2$ est la matrice de $u + v - \mathrm{Id}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, il s'ensuit que $\mathrm{rg}(u + v - \mathrm{Id}) = 1$. D'après le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme $u + v - \mathrm{Id}$ de $\mathbb{R}^2$, on obtient que :

$$\dim \ker(u + v - \mathrm{Id}) = \dim \mathbb{R}^2 - \mathrm{rg}(u + v - \mathrm{Id}) = 2 - 1 = 1.$$

En particulier, on trouve que :

$$(A_4) : \ker(u + v - \mathrm{Id}) \neq \{0\}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{les endomorphismes } u, v \text{ sont solutions du problème posé.}}$$

On revient au cas général, et on considère un couple (u, v) solution du problème.

(2) (a) Montrons que u et v sont des isomorphismes et donnons u^{-1}, v^{-1} en fonction de u, v, Id. D'après la condition (A_1), on sait que $u^2 = -\mathrm{Id}$. En particulier, on voit que $u \circ (-u) = (-u) \circ u = \mathrm{Id}$, ce qui entraine que :

$$\boxed{u \text{ est un isomorphisme et de plus : } u^{-1} = -u.}$$

De plus, d'après la condition (A_3) on sait que $(v - \mathrm{Id})^2 = 0$, et donc :

$$(v - \mathrm{Id})^2 = v^2 - 2v + \mathrm{Id} = 0.$$

En particulier, on obtient par des calculs simples que :

$$v \circ (-v + 2\mathrm{Id}) = (-v + 2\mathrm{Id}) \circ v = -v^2 + 2v = \mathrm{Id}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{v \text{ est un isomorphisme et de plus : } v^{-1} = -v + 2\mathrm{Id}.}$$

(b) Calculons v^n comme combinaison linéaire de v et Id pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $v^2 - 2v + \mathrm{Id} = 0$, on voit sur les premières puissances de v que :

$$\begin{cases} v^0 = 0.v + 1.\mathrm{Id} \\ v^1 = 1.v + 0.\mathrm{Id} \\ v^2 = 2.v - 1.\mathrm{Id} \end{cases},$$

ce qui nous invite à conjecturer la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) : \text{"}v^n = nv - (n-1)\mathrm{Id}\text{"}.$$

Montrons la propriété $\mathcal{P}$ par récurrence. Tout d'abord, on voit que $\mathcal{P}(0)$ est vraie, car :

$$v^0 = 0.v + 1.\mathrm{Id} = 0.v - (0 - 1).\mathrm{Id}.$$

A présent, supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi. Par hypothèse de récurrence, on sait que $v^n = nv - (n-1)\mathrm{Id}$. Si l'on compose cette égalité avec v, alors on trouve que :

$$v^{n+1} = v \circ v^n = v \circ (nv - (n-1)\mathrm{Id}) = nv^2 - (n-1)v.$$

Comme $v^2 - 2v + \mathrm{Id} = 0$, on voit que $v^2 = 2v - \mathrm{Id}$, et donc :

$$\begin{aligned} v^{n+1} &= nv^2 - (n-1)v \\ &= n\,(2v - \mathrm{Id}) - (n-1)v \\ &= [2n - (n-1)]v - n\mathrm{Id} \\ &= (n+1)v - n\mathrm{Id}, \end{aligned}$$

d'où il s'ensuit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout ordre $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{v^n = nv - (n-1)\mathrm{Id}.}$$

(3) (a) Etablissons que : $\mathfrak{Im}(v - \mathrm{Id}) \subset \ker(v - \mathrm{Id})$. Soit $y \in \mathfrak{Im}(v - \mathrm{Id})$. Par définition, il existe $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $y = (v - \mathrm{Id})(x)$. Comme $(v - \mathrm{Id})^2 = 0$, on obtient que :

$$(v - \mathrm{Id})(y) = (v - \mathrm{Id})\,[(v - \mathrm{Id})(x)] = (v - \mathrm{Id})^2(x) = 0,$$

et donc $y \in \ker(v - \mathrm{Id})$. Comme ceci est vrai pour tout $y \in \mathfrak{Im}(v - \mathrm{Id})$, on en déduit que :

$$\boxed{\mathfrak{Im}(v - \mathrm{Id}) \subset \ker(v - \mathrm{Id}).}$$

(b) Montrons que : $\mathfrak{Im}(v - \mathrm{Id}) = \ker(v - \mathrm{Id})$. Comme $v \neq \mathrm{Id}$ d'après la condition (A_2), on voit que $(v - \mathrm{Id}) \neq 0$, et donc $\mathfrak{Im}(v - \mathrm{Id}) \neq \{0\}$. En particulier, on trouve que :

$$\dim \mathfrak{Im}(v - \mathrm{Id}) \geq 1.$$

De plus, d'après le théorème du rang appliqué à $(v - \mathrm{Id})$, on obtient que :

$$\dim \mathfrak{Im}(v - \mathrm{Id}) + \dim \ker(v - \mathrm{Id}) = \dim \mathbb{R}^2 = 2,$$

d'où il s'ensuit que $\dim \ker(v - \mathrm{Id}) \leq 2 - 1 = 1$. Mais comme $\mathfrak{Im}(v - \mathrm{Id}) \subset \ker(v - \mathrm{Id})$ d'après la question précédente, on trouve que :

$$1 \leq \dim \mathfrak{Im}(v - \mathrm{Id}) \leq \dim \ker(v - \mathrm{Id}) \leq 1.$$

En particulier, il s'ensuit que $\dim \mathfrak{Im}(v - \mathrm{Id}) = \dim \ker(v - \mathrm{Id}) = 1$. Mais au vu de l'inclusion $\mathfrak{Im}(v - \mathrm{Id}) \subset \ker(v - \mathrm{Id})$, on en déduit que :

$$\boxed{\mathfrak{Im}(v - \mathrm{Id}) = \ker(v - \mathrm{Id}).}$$

(4) Montrons que : $\dim \ker(u + v - \mathrm{Id}) = 1$. Pour ce faire, on raisonne par l'absurde et on suppose que $\dim \ker(u+v-\mathrm{Id}) \neq 1$. Comme u, v satisfont la condition (A_4), on sait déjà que $\ker(u+v-\mathrm{Id}) \neq \{0\}$, et donc $\dim \ker(u + v - \mathrm{Id}) \neq 0$. Mais comme $\ker(u + v - \mathrm{Id})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, cela entraine que $\dim \ker(u + v - \mathrm{Id}) = 2$, et donc $\ker(u + v - \mathrm{Id}) = \mathbb{R}^2$. En particulier, on voit que :

$$u + v - \mathrm{Id} = 0,$$

ce qui nous donne que $-u = v - \mathrm{Id}$. En passant aux carrés, on trouve avec la condition (A_3) que :

$$(-u)^2 = u^2 = (v - \mathrm{Id})^2 = 0,$$

ce qui contredit le fait que $u^2 = -\mathrm{Id}$ d'après la condition (A_1). Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\dim \ker(u + v - \mathrm{Id}) = 1.}$$

(5) Soit (e_2) une base de $\ker(u + v - \mathrm{Id})$ et posons : $e_1 = -u(e_2)$.

(a) Montrons que (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$. Pour ce faire, on raisonne par l'absurde et on suppose que (e_1, e_2) n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$. Alors ces deux vecteurs sont colinéaires. Mais comme (e_2) est une base de $\ker(u + v - \mathrm{Id})$, le vecteur e_2 est non nul et il existe un réel λ tel que $e_1 = \lambda e_2$. Dès lors, comme $e_1 = -u(e_2)$, on a la relation :

$$u(e_2) = -e_1 = -\lambda e_2.$$

En composant par u, on trouve alors par linéarité de u que :

$$u^2(e_2) = u(u(e_2)) = u(-\lambda e_2) = -\lambda u(e_2) = (-\lambda)(-\lambda)e_2 = \lambda^2 e_2.$$

Comme $u^2 = -\mathrm{Id}$ d'après la condition (A_1), on obtient que :

$$u^2(e_2) = -e_2 = \lambda^2 e_2,$$

d'où il s'ensuit que $(1+\lambda^2)e_2 = 0$. Mais comme $e_2 \neq 0$, cela entraine que $1+\lambda^2 = 0$, ce qui est impossible car λ est un nombre réel. Par conséquent :

$$\boxed{(e_1, e_2) \text{ est une base de } \mathbb{R}^2.}$$

(b) Donnons les matrices de u et v dans la base (e_1, e_2). Par construction, on sait que :

$$u(e_2) = -e_1 = -1 \times e_1 + 0 \times e_2.$$

Comme $u^2 = -\mathrm{Id}$ d'après la condition (A_1), on obtient que :

$$u(e_1) = u(-u(e_2)) = -u^2(e_2) = e_2 = 0 \times e_1 + 1 \times e_2.$$

Dès lors, la matrice de u dans la base (e_1, e_2) est donnée par :

$$\boxed{\mathfrak{mat}_{(e_1,e_2)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

A présent, comme (e_2) est une base de $\ker(u+v-\mathrm{Id})$, on voit que :

$$(u+v-\mathrm{Id})(e_2) = u(e_2) + v(e_2) - e_2 = 0.$$

Comme $u(e_2) = -e_1$ par construction, on obtient que :

$$v(e_2) = -u(e_2) + e_2 = e_1 + e_2 = 1 \times e_1 + 1 \times e_2.$$

Partant de là, on voit que $(v-\mathrm{Id})(e_2) = v(e_2) - e_2 = e_1$. Mais comme $(v-\mathrm{Id})^2 = 0$ d'après la condition (A_3), on trouve que :

$$(v-\mathrm{Id})^2(e_2) = (v-\mathrm{Id})((v-\mathrm{Id})(e_2)) = (v-\mathrm{Id})(e_1) = 0,$$

d'où il s'ensuit que $v(e_1) - e_1 = 0$, et donc :

$$v(e_1) = e_1 = 1 \times e_1 + 0 \times e_2.$$

Dès lors, la matrice de v dans la base (e_1, e_2) est donnée par :

$$\boxed{\mathfrak{mat}_{(e_1,e_2)}(v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

(6) Donnons la conclusion de cet exercice. D'après la question (1), on sait que les deux endomorphismes u, v canoniquement associés aux matrices U, V données ci-avant sont solutions du problème posé. Plus généralement, on peut vérifier comme à la question (1) que deux endomorphismes u, v dont les matrices dans une base donnée sont égales à U, V sont solutions du problème posé. Réciproquement, on a vu aux questions précédentes que, si deux endomorphismes u, v de $\mathbb{R}^2$ sont solutions du problème posé, alors il existait une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle les matrices de u, v sont égales à U, V. Par conséquent :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{deux endomorphismes } u, v \text{ de } \mathbb{R}^2 \text{ sont solutions du problème posé si et seulement} \\ \text{s'il existe une base } \mathcal{B} \text{ de } \mathbb{R}^2 \text{ telle que : } \mathfrak{mat}_{\mathcal{B}}(u) = U, \ \ \mathfrak{mat}_{\mathcal{B}}(v) = V.\end{array}}$$

Corrigé de l'exercice 7. Soit E un espace vectoriel de dimension finie > 0. On dira qu'un endomorphisme f de E est nilpotent s'il existe un entier naturel $n > 0$ tel que $f^n = 0$. De plus, pour tout $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$, on définit *le crochet de Lie de f et g* par : $[f, g] = f \circ g - g \circ f$.

(1) (a) Montrons que : $\forall (f, g, h) \in \mathcal{L}(E)^3$, $[[f, g], h] + [[g, h], f] + [[h, f], g] = 0$. Pour ce faire, considérons trois endomorphismes f, g, h de E. D'après les propriétés de la composition pour les applications

linéaires, on trouve que :

$$\begin{aligned}
[[f,g],h]+[[g,h],f]+[[h,f],g] &= [f,g]\circ h - h\circ[f,g]+[g,h]\circ f - f\circ[g,h] \\
&\quad +[h,f]\circ g - g\circ[h,f] \\
&= (f\circ g - g\circ f)\circ h - h\circ(f\circ g - g\circ f)+(g\circ h - h\circ g)\circ f \\
&\quad -f\circ(g\circ h - h\circ g)+(h\circ f - f\circ h)\circ g - g\circ(h\circ f - f\circ h) \\
&= f\circ g\circ h - g\circ f\circ h - h\circ f\circ g + h\circ g\circ f + g\circ h\circ f \\
&\quad -h\circ g\circ f - f\circ g\circ h + f\circ h\circ g + h\circ f\circ g - f\circ h\circ g \\
&\quad -g\circ h\circ f + g\circ f\circ h \\
&= (f\circ g\circ h - f\circ g\circ h)-(g\circ f\circ h - g\circ f\circ h) \\
&\quad -(h\circ f\circ g - h\circ f\circ g)+(h\circ g\circ f - h\circ g\circ f) \\
&\quad +(g\circ h\circ f - g\circ h\circ f)+(f\circ h\circ g - f\circ h\circ g) \\
&= 0-0-0+0+0+0 \quad = \quad 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $(f,g,h)\in\mathcal{L}(E)^3$:

$$\boxed{[[f,g],h]+[[g,h],f]+[[h,f],g]=0.}$$

(b) Soit $(f,g)\in\mathcal{L}(E)^2$. Donnons une condition nécessaire et suffisante pour que $[f,g]=[g,f]$. Par des calculs simples, on trouve que :

$$[g,f]=g\circ f - f\circ g = -(f\circ g - g\circ f) = -[f,g].$$

Dès lors, on voit que $[f,g]=[g,f]$ si et seulement si $[f,g]=-[f,g]$, c'est-à-dire si $[f,g]=0$, ou en d'autres termes si $f\circ g - g\circ f=0$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{[f,g]=[g,f] \iff f \text{ et } g \text{ commutent.}}$$

(2) Soit $f\in\mathcal{L}(E)$. On souhaite démontrer dans cette question l'équivalence des propositions suivantes (i) : "il existe un projecteur $p\in\mathcal{L}(E)$ tel que $f=[p,f]$" et (ii) : "$f^2=0$".

(a) On suppose (i). Montrons tout d'abord que $p\circ f\circ p=0$. Par hypothèse, on sait que :

$$f=[p,f]=p\circ f - f\circ p.$$

En composant à gauche par p, on trouve que :

$$p\circ f = p\circ(p\circ f - f\circ p) = p^2\circ f - p\circ f\circ p.$$

Comme p est un projecteur, on sait que $p^2=p$, et donc :

$$p\circ f = p^2\circ f - p\circ f\circ p = p\circ f - p\circ f\circ p.$$

Par différence, il s'ensuit que $0=-p\circ f\circ p$, et donc :

$$\boxed{p\circ f\circ p=0.}$$

A présent, montrons que $f\circ p=0$. En composant à droite par p, on trouve que :

$$f\circ p=[p,f]\circ p=(p\circ f - f\circ p)\circ p = p\circ f\circ p - f\circ p^2.$$

Comme p est un projecteur, on sait que $p^2=p$, et donc :

$$f\circ p = p\circ f\circ p - f\circ p^2 = p\circ f\circ p - f\circ p.$$

Comme $p\circ f\circ p=0$ d'après ce qui précède, on obtient que :

$$f\circ p = p\circ f\circ p - f\circ p = 0 - f\circ p = -f\circ p.$$

Dès lors, il s'ensuit que $2f\circ p=0$, et donc :

$$\boxed{f\circ p=0.}$$

Montrons enfin que $f^2 = 0$. D'après les relations ci-dessus, on trouve que :

$$\begin{aligned} f^2 &= [p,f]\circ[p,f] \\ &= (p\circ f - f\circ p)\circ(p\circ f - f\circ p) \\ &= p\circ f\circ p\circ f + f\circ p\circ f\circ p - p\circ f\circ f\circ p - f\circ p\circ p\circ f \\ &= p\circ(f\circ p)\circ f + (f\circ p)\circ f\circ p - p\circ f\circ(f\circ p) - (f\circ p)\circ p\circ f \\ &= p\circ 0\circ f + 0\circ f\circ p - p\circ f\circ 0 - 0\circ p\circ f \\ &= 0+0-0-0 \quad = \quad 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{f^2 = 0.}$$

(b) On suppose (ii). Montrons qu'il existe une projection p de E tel que $f = [p,f]$. Pour ce faire, considérons un supplémentaire F de $\mathfrak{Im}(f)$ dans E, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel F de E tel que $E = \mathfrak{Im}(f)\oplus F$, et soit p la projection sur $\mathfrak{Im}(f)$ parallèlement à F. Fixons alors un élément x de E. Comme $f(x)$ appartient à $\mathfrak{Im}(f)$ par définition et que p est une projection sur $\mathfrak{Im}(f)$, on voit que :

$$(p\circ f)(x) = p(f(x)) = f(x). \quad (*)$$

Comme $\mathfrak{Im}(p) = \mathfrak{Im}(f)$ par construction, le vecteur $p(x)$ appartient à $\mathfrak{Im}(f)$ et il existe un vecteur $y\in E$ tel que $p(x) = f(y)$. Dès lors, on obtient avec la relation $f^2 = 0$ que :

$$(f\circ p)(x) = f(p(x)) = f(f(y)) = f^2(y) = 0. \quad (**)$$

En particulier, on trouve avec les relations $(*)$ et $(**)$ que :

$$[p,f](x) = (p\circ f)(x) - (f\circ p)(x) = f(x) - 0 = f(x).$$

Mais comme ceci est vrai pour tout $x\in E$, il s'ensuit que :

$$[p,f] = f.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{il existe une projection } p\in\mathcal{L}(E) \text{ telle que } f = [p,f].}$$

(3) Soit g un élément fixé de $\mathcal{L}(E)$.

(a) Montrons que l'application $\varphi_g : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E),\ f \longmapsto [f,g]$ est linéaire. Pour ce faire, considérons deux réels λ_1, λ_2 et deux éléments f_1, f_2 de $\mathcal{L}(E)$. D'après les propriétés de la composition pour les applications linéaires, on trouve que :

$$\begin{aligned} \varphi_g(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) &= [\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g] \\ &= (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)\circ g - g\circ(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) \\ &= \lambda_1 f_1\circ g + \lambda_2 f_2\circ g - \lambda_1 g\circ f_1 - \lambda_2 g\circ f_2 \\ &= \lambda_1(f_1\circ g - g\circ f_1) + \lambda_2(f_2\circ g - g\circ f_2) \\ &= \lambda_1[f_1,g] + \lambda_2[f_2,g] \\ &= \lambda_1\varphi_g(f_1) + \lambda_2\varphi_g(f_2). \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\varphi_g \text{ est linéaire.}}$$

(b) Montrons que, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tout $f\in\mathcal{L}(E)$, on a :

$$(\varphi_g)^n(f) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}g^k\circ f\circ g^{n-k}.$$

Pour ce faire, on pose $S(f) = f \circ g$ et $T(f) = g \circ f$ pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$. Comme à la question précédente, on vérifie facilement que S et T sont des endomorphismes de $\mathcal{L}(E)$. De plus, on voit par des calculs simples que, pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$:

$$(S \circ T)(f) = S(T(f)) = S(g \circ f) = g \circ f \circ g = T(f \circ g) = T(S(f)) = (T \circ S)(f).$$

En particulier, les endomorphismes S et T commutent. En outre, comme $\varphi_g(f) = f \circ g - g \circ f = S(f) - T(f)$ pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, on voit que $\varphi_g = S - T$. Dès lors, on obtient d'après la formule du binôme que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(\varphi_g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-T)^k \circ S^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} T^k \circ S^{n-k}. \quad (*)$$

Comme $S(f) = f \circ g$ et $T(f) = g \circ f$ pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, on vérifie facilement par récurrence que $S^p(f) = f \circ g^p$ et $T^p(f) = g^p \circ f$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$. Dès lors, il s'ensuit avec la relation $(*)$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$:

$$\begin{aligned} (\varphi_g)^n(f) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} T^k \circ S^{n-k}(f) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} T^k \left(S^{n-k}(f)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} T^k \left(f \circ g^{n-k}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} g^k \circ f \circ g^{n-k}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$:

$$\boxed{(\varphi_g)^n(f) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} g^k \circ f \circ g^{n-k}.}$$

(c) Montrons que, si g est nilpotent, alors φ_g est nilpotent. Pour ce faire, fixons un entier naturel n tel que $g^n = 0$. D'après la question (3)(b), on sait que, pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$:

$$(\varphi_g)^{2n}(f) = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} g^k \circ f \circ g^{2n-k}. \quad (*)$$

Si $k \geq n$, alors on voit que $g^k = g^n \circ g^{k-n} = 0 \circ g^{k-n} = 0$, et donc $g^k \circ f \circ g^{2n-k} = 0$. De même, si $k < n$, alors on voit que $2n - k \geq n$, ce qui entraine que $g^{2n-k} = 0$, et donc $g^k \circ f \circ g^{2n-k} = 0$. Dans tous les cas, on trouve que tous les termes dans la somme $(*)$ sont égaux à 0, et donc :

$$(\varphi_g)^{2n}(f) = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} g^k \circ f \circ g^{2n-k} = 0.$$

Comme ceci est vrai pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, il s'ensuit que $(\varphi_g)^{2n} = 0$, et donc :

$$\boxed{\text{si } g \text{ est nilpotent, alors } \varphi_g \text{ est nilpotent.}}$$

(4) Résolvons l'équation $[f, g] = \mathrm{Id}_E$ d'inconnues $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Comme E est de dimension finie, on obtient avec les propriétés de la trace que, pour tout $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$:

$$\mathrm{Tr}\,([f, g]) = \mathrm{Tr}\,(f \circ g - g \circ f) = \mathrm{Tr}\,(f \circ g) - \mathrm{Tr}\,(g \circ f) = 0.$$

En particulier, s'il existait un couple $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $[f, g] = \mathrm{Id}_E$, on trouverait que :

$$\mathrm{Tr}\,([f, g]) = 0 = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{Id}_E) = \dim(E),$$

ce qui contredit le fait que $\dim(E) > 0$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{il n'existe pas de couple } (f, g) \in \mathcal{L}(E)^2 \text{ tel que } [f, g] = \mathrm{Id}_E.}$$