TRAVAUX DIRIGÉS : SÉRIES NUMÉRIQUES (RÉPONSES - INDICATIONS)

Exercice 1.

(1) div ,	(2) cv ,	(3) cv ,	(4) div ,
(5) cv ,	(6) cv ,	(7) cv ,	(8) cv ,
(9) div ,	(10) cv ,	(11) cv ,	(12) div ,
(13) cv ,	(14) cv ,	(15) cv ,	(16) div ,
(17) cv ,	(18) div ,	(19) div ,	(20) cv .

Exercice 2.

(1) $\sum \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^a$ converge si et seulement si $a>2$.
(2) $\sum \ln\left(1+\dfrac{1}{n^a}\right)$ converge si et seulement si $a>1$.

Exercice 3.

(1) $\sum 2\ln(n^3+n^2)-3\ln(n^2+n)$ diverge.
(2) $\sum \sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}$ converge.
(3) $\sum 2+n\ln\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)$ converge.

Exercice 4. Soit $p\in\mathbb{N}$. Montrer que les séries suivantes convergent et calculer leur somme :

(1) $\dfrac{3}{4}$,	(2) $\dfrac{4}{9}e^{1/3}$,	(3) 1 ,	(4) $\dfrac{e}{(e-1)^3}$,
(5) 1 ,	(6) $\dfrac{e^2+e^{-2}}{2}$,	(7) $\dfrac{64}{27}$,	(8) $\dfrac{65}{27}$,
(9) $2e$,	(10) $\dfrac{e}{p!}$,	(11) $\dfrac{1}{4}$,	(12) $7e^2$,
(13) $-2(e^{-2}-1)$,	(14) $4e$,	(15) $\ln(6)$,	(16) $\ln(\cos(1))$.

Exercice 5. Utiliser le critère de négligeabilité et le fait que $u_n^2 \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$.

Exercice 6.

(1) Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.
(2) Remarquer que u_n et v_n sont les sommes partielles d'ordres pair et impair de la série.
(3) Vérifier que les séries en question divergent absolument, puis utiliser la question (2) pour montrer qu'elles convergent.
(4) Effectuer un développement limité du terme général à l'ordre 2 au voisinage de $+\infty$. En déduire que la série en question diverge.

Exercice 7.

(1) $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2}$.
(2) Utiliser la question (1) et le critère d'équivalence.
(3) Passer par un télescopage.

Exercice 8.

(1) (a) Utiliser la définition axiomatique avec ε et n_0 de la limite d'une suite.
(b) Procéder par récurrence.

(c) Utiliser le critère de comparaison par rapport à une série géométrique.

(2) (a) Procéder comme en (1)(a).

(b) Utiliser (2)(a) pour montrer que $a_{n+1} \geq a_n$ pour tout $n \geq n_0$.

(c) La série $\sum a_n$ diverge.

(3) La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{1.3....(2n-1)}$ converge car $\displaystyle\frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$.

Exercice 9.

(1) Procéder par récurrence.

(2) (a) Montrer que $\sum_{k=1}^{n} b_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} a_k$ pour tout $n \geq 1$, puis conclure sur la convergence de la série $\sum b_n$. En déduire que la suite (na_n) converge comme différence de deux suites convergentes.

(b) Raisonner par l'absurde pour montrer que la suite (na_n) tend vers 0, puis conclure.

(3) (a) Faire une minoration sur la somme de droite.

(b) Utiliser la question (3)(a) pour montrer que $0 \leq na_n \leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} b_j$. Conclure comme en (2)($b$).

Exercice 10.

(1) Passer par le logarithme et utiliser le critère d'équivalence.

(2) (a) Utiliser la formule de Taylor.

(b) Utiliser les questions (1), (2)(a) et le fait que la série $\sum u_n^2$ converge.

(3) (a) Procéder par récurrence.

(b) Utiliser des équivalents pour montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{\sin(x)}{x}$.

(c) Appliquer la question (3)(b) au cas où $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 11.

(1) $a = -2$ et $b = 1$.

(2) La somme de la série vaut $-\ln(2)$.

1. Exercices supplémentaires

Exercice 12. Procéder par double implication, en utilisant le critère d'équivalence et le fait que $u_n = \dfrac{v_n}{1-v_n}$.

Exercice 13.

(1) $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$.

(2) Utiliser le critère d'équivalence.

(3) Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, puis utiliser un télescopage pour montrer que (u_n) converge vers 0.

(4) (a) $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12n^2}$.

(b) Utiliser la question (4)(a) et le critère d'équivalence.

(c) Penser au télescopage!

(d) $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{C}$.

Exercice 14.

(1) (a) $u_0 = \dfrac{\pi}{4}$, $u_1 = \dfrac{\ln(2)}{2}$, $u_2 = 1 - \dfrac{\pi}{4}$.

(b) Déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$, puis conclure avec le théorème de la limite monotone.

(c) Vérifier que $u_{n+2} + u_n = \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Utiliser ensuite la question (1)(b) et faire un passage à la limite.

(2) (a) Utiliser la question (1)(c) et ladécroissance de la suite (u_n).

(b) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$.

(c) La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

(3) (a) Utiliser la question (1)(c) et procéder par récurrence.

(b) Les séries en question convergent d'après (3)(a). De plus : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1} = -\frac{\pi}{4}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln(2)$.

Exercice 15.

(1) Développer le produit du milieu.
(2) Utiliser la question (1).
(3) Appliquer la question (2) aux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \geq 0$ par $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$ et $v_n = \dfrac{1}{2^n}$. La somme vaut $S = 2e^2$.

Exercice 16.

(1) Procéder comme à l'exo 8 sur la règle de D'Alembert.
(2) Effectuer une récurrence.
(3) (a) $\varphi(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$.
  (b) φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
(4) (a) Vérifier que $u_{2n+2} = \varphi^2(u_{2n})$ et $u_{2n+3} = \varphi^2(u_{2n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Constater que φ^2 est croissante, et en déduire la monotonie des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}). Montrer ensuite par récurrence qu'elles sont positives, et conclure à l'aide du théorème de la limite monotone. Pour trouver leurs limites respectives, résoudre l'équation $\varphi^2(x) = x$.
  (b) Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite, donc (u_n) converge. Pour la limite, utiliser la question $(4)(a)$.
(5) (a) Utiliser le critère de comparaison avec une série géométrique.
  (b) $A_0(x) = x^2 A(x)$, $A_1(x) = x(A(x) - 1)$, $A_2(x) = A(x) - 1 - x$ pour tout $x \in]-R, R[$.
  (c) Comme $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut vérifier que $A_0(x) + A_1(x) = A_2(x)$ pour tout $x \in]-R, R[$. On en déduit que, pour tout $x \in]-R, R[$:
$$A(x) = \frac{-1}{x^2 + x - 1}.$$

Exercice 17.

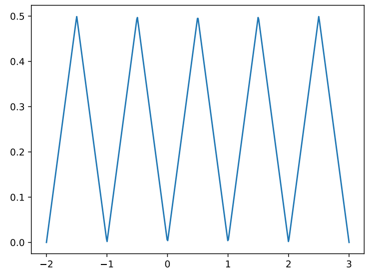
(1) Utiliser le fait que $\dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{S_k}$ pour tout $t \in [S_k, S_{k+1}]$ et la croissance de l'intégrale.
(2) Montrer à l'aide de (1) que $\sum u_k$ converge si et seulement si $\sum v_k$ converge.
(3) Si $u_n = \dfrac{1}{n}$, on peut vérifier à l'aide de l'exo 7 que $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$. Donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n\ln(n)}$ et $\displaystyle\sum \frac{1}{n\ln(n)}$ diverge.

Exercice 18.

(1) Vérifier la convergence absolue. Pour la somme, séparer en termes pairs et impairs. On trouve : $S = \dfrac{\pi^2}{12}$.
(2) (a) Ecrire que $\dfrac{1 + t^{p+1}}{1 + t} = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-t)^k$ pour tout $t \in [0, 1]$, puis intégrer cette relation sur $[0, 1]$.
  (b) Utiliser la question $(2)(a)$ et majorer $\left|\displaystyle\int_0^x \frac{t^{p+1}}{1+t} dt\right|$ à l'aide de la croissance de l'intégrale.
(3) (a) Utiliser la question $(2)(b)$, intégrer le tout sur $[0, 1]$ puis faire tendre p vers $+\infty$.
  (b) Montrer que $\dfrac{n}{k(nk+1)} - \dfrac{1}{k^2} = -\dfrac{1}{k^2(nk+1)}$, puis majorer avec l'inégalité triangulaire.
  (c) $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{12n}$.
  (d) Vérifier à l'aide d'une IPP que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$u_n - 1 = \int_0^1 \frac{-t^n dt}{1 + t^n} = \frac{-1}{n} \left[\ln(2) - \ln(1) - \int_0^1 \ln(1 + t^n) dt\right].$$
  Conclure en utilisant la question précédente.

Exercice 19.

(1) (a) Cf. cours.
  (b) L'ensemble $E = \{|x - n|; n \in \mathbb{Z}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et minorée par 0, donc E admet une borne inférieure. Vérifier ensuite que c'est un minimum.
(2) (a) $f(x) = |x|$ pour tout $x \in [-1/2, 1/2]$.
  (b) Comme f est 1-périodique, on trouve avec un petit programme Python le graphe suivant :



(3) (a) D'après l'inégalité triangulaire, on a $|x-n| \leq |x-y| + |y-n|$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On passe ensuite à la borne inférieure.

(b) Avec la question (3)(a), on commence par écrire que, pour tout $n_i n\mathbb{Z}$:

$$f(x) - f(y) \leq |y-n| + |x-y| - f(y).$$

En passant à la borne inférieure, on trouve que $f(x) - f(y) \leq |x-y|$. On procède de même pour majorer $f(y) - f(x)$ et on conclut.

(4) (a) Comme f est bornée sur $\mathbb{R}$, on peut effectuer une comparaison par rapport à une série géométrique.

(b) Utiliser l'inégalité triangulaire et la question (3)(a).

(c) Suivre l'indication donnée.

(d) Vérifier que $f(2^k 2^{-n}) = 2^{k-n}$ si $k \leq n-1$ et $f(2^k 2^{-n}) = 0$ sinon. A l'aide de ce résultat, montrer que $b(2^{-n}) = n2^{-n}$ pour tout $n \geq 1$. En déduire que $\dfrac{b(2^{-n}) - b(0)}{2^{-n}} = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et conclure.