TRAVAUX DIRIGÉS : INTÉGRALES IMPROPRES (RÉPONSES - INDICATIONS)

Exercice 1.

(1) cv	(2) cv	(3) cv
(4) cv	(5) div	(6) cv
(7) div	(8) div	(9) cv
(10) cv	(11) div	(12) cv
(13) cv	(14) cv	(15) div
(16) div	(17) cv	(18) cv
(19) cv	(20) cv	(21) div
(22) div	(23) cv	(24) cv

Exercice 2.

(1) div	(2) div	(3) $\ln(2)$	(4) $2\sqrt{\ln(2)}$,
(5) div	(6) 0	(7) 1	(8) div,
(9) 2	(10) $\pi/4$	(11) 2	(12) 0.

Exercice 3. (1) $a\pi$, (2) 0 , (3) $\dfrac{1}{2}$, (4) $\dfrac{1}{2}$.

Exercice 4.

(1) 0	(2) $\ln(2)$,
(3) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\ln\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)$	(4) $\dfrac{\pi}{2}$,
(5) $\dfrac{94\sqrt{2}}{15}$	(6) π,
(7) 12	(8) -2.

Exercice 5.

(1) Effectuer le changement de variable $u = t^2$.
(2) Appliquer le critère d'équivalence en 0.
(3) Procéder par IPP.
(4) Conclure avec les questions précédentes.

Exercice 6.

(1) Appliquer le critère de comparaison avec une intégrale exponentielle.
(2) A l'aide d'une intégration par parties, on trouve que : $J(z) = \dfrac{e^{-z}}{z} - \displaystyle\int_z^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{t^2}dt$. Ensuite, on montre par des encadrements d'intégrales que $\displaystyle\int_z^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{t^2}dt \underset{z\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{e^{-z}}{z}\right)$, et on conclut.

Exercice 7.

(1) $\mathcal{D}_f =]0, +\infty[$.
(2) Effectuer le changement de variable $u = t + \dfrac{1}{2}$. On trouve que : $f(1) = \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

(3) Si $x \leq y$, on voit que $\dfrac{1}{1+t+t^{x+1}} \geq \dfrac{1}{1+t+t^{y+1}}$ pour tout $t \geq 1$. Conclure avec la croissance de l'intégrale.

(4) (a) Utiliser le critère d'équivalence avec une intégrale de Riemann.
(b) Effectuer le calcul!
(c) On trouve que : $g(x) = \dfrac{\ln(2)}{x}$.

(5) (a) Si $x > 0$, on voit que $0 \leq \dfrac{1}{1+t+t^{x+1}} \leq \dfrac{1}{t+t^{x+1}}$ pour tout $t \geq 1$. Conclure avec la croissance de l'intégrale.
(b) Idem qu'à la question précédente en utilisant le fait que $g(x) = \dfrac{\ln(2)}{x}$.
(c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $f(x) \underset{x \to +0^+}{\sim} \dfrac{\ln(2)}{x}$.

Exercice 8.

(1) On vérifie que f est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$, qu'elle tend vers $+\infty$ en 1 et vers 0 en $+\infty$.

(2) (a) Pour l'impropreté en $+\infty$, montrer que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$. Pour l'impropreté en 1, montrer que $f(x) \underset{x \to 1}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x-1}}$. Conclure.
(b) En posant $x = \dfrac{1}{u}$, puis $t = \cos(u)$, on trouve que :

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

(3) (a) Pour n fixé, S_n est la somme d'une série convergente car : $\dfrac{1}{k\sqrt{k^2-n^2}} \underset{k \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{k^2}$.
(b) Suivre les indications données!
(c) On trouve que : $S_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}$

Exercice 9. On pose $C(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t^2}dt$ et $S(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2}dt$.

(1) Utiliser le critère de comparaison par rapport à $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$. Etablir ainsi la convergence absolue, puis la convergence $C(x)$ et $S(x)$.

(2) (a) Montrer que $|C(x) - C(x_0)|$ tend vers 0 quand x tend vers x_0. Pour cela, on utilise les accroissements finis pour montrer que $|\cos(xt) - \cos(x_0 t)| \leq |x - x_0| t$ pour tout $t \geq 0$. On multiplie le tout par e^{-t^2} et on intègre pour aboutir à :

$$|C(x) - C(x_0)| \leq |x - x_0| \int_0^{+\infty} te^{-t^2}dt.$$

On conclut alors par encadrement. Idem pour S.
(b) Utiliser la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1.
(c) Montrer que $\left| \dfrac{S(x) - S(x_0)}{x - x_0} - \displaystyle\int_0^{+\infty} t\cos(x_0 t)e^{-t^2}dt \right|$ tend vers 0 quand x tend vers x_0, en procédant comme à la question $(2)(a)$ et en utilisant la question $(2)(b)$. On trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$S'(x) = \int_0^{+\infty} t\cos(xt)e^{-t^2}dt.$$

(3) Faire une IPP pour trouver que : $S'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{xS(x)}{2}$.

(4) (a) $g'(x) = f'(x)e^{x^2/4} + f(x)\dfrac{x}{2}e^{x^2/4}$.
(b) $2f'(x) + xf(x) = 0$ ssi $g'(x) = 0$ ssi g est constante. Au final, on trouve que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation différentielle $2f'(x) + xf(x) = 0$ est donné par :

$$\mathcal{S} = \left\{ f : x \longmapsto \lambda e^{-x^2/4},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

(c) Calculer $S'(x)$ et reporter le résultat dans la relation de la question (3). On trouve que $A'(x) = \dfrac{1}{2}e^{x^2/4}$, et donc il existe une constante C telle que :

$$A(x) = C + \int_0^x e^{t^2/4}dt.$$

Comme $S(0) = 0$, il s'ensuit que $A(0) = 0$ et $C = 0$, d'où le résultat.

(5) (a) Procéder par IPP à partir de la question $(2)(c)$.

(b) Montrer que $|S'(x)| \leq \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty}(1+2t^2)e^{-t^2}dt$. En déduire par encadrement que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S'(x) = 0$. Comme $S'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{xS(x)}{2}$ d'après la question (3), il s'ensuit que $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

1. Exercices supplémentaires

Exercice 10.

(1) cv , (2) div , (3) cv , (4) cv.

Exercice 11.

(1) $2\ln(2) - 2$, (2) 2 , (3) $\dfrac{b}{a^2+b^2}$, (4) $\dfrac{1}{2}$.

Exercice 12.

(1) Le changement de variable proposé nous donne que :
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\lambda)} = \int_0^{+\infty} \frac{t^\lambda dt}{(1+t^2)(1+t^\lambda)}.$$
Dès lors, ceci entraine que :
$$2I = I + I = \int_0^{+\infty} \frac{(1+x^\lambda)dx}{(1+x^2)(1+x^\lambda)} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$
On en déduit que : $I = \dfrac{\pi}{4}$.

(2) Soit J la deuxième intégrale. Le changement de variable proposé nous donne que $J = -J$, et donc $J = 0$.

Exercice 13. On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1-t^3)^{1/3}}$.

(1) La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{(1+x^3)^{1/3}}$ est $\mathcal{C}^1$ strictement décroissante, donc le changement de variable est licite. On trouve le résultat après calculs, et on justifie la convergence à l'aide du critère d'équivalence.

(2) Procéder comme à la question (1).

(3) Partant du fait que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{1+x^3} = \int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^3}$, on trouve que :
$$2I = I + I = \int_0^{+\infty} \frac{(x+1)dx}{1+x^3} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1-x+x^2}.$$
Il n'y a plus qu'à conclure.

(4) Effectuer les calculs!

Exercice 14.

(1) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$, et donc elle admet une primitive F sur $\mathbb{R}_+$ qui s'annule en 0 (cf. cours de première année). De plus, on trouve que : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} F(t) = \int_0^{+\infty} f(t)dt$.

(2) Procéder par IPP!

(3) Si $x = 0$, alors le résultat est clair d'après l'énoncé. Si $x > 0$, alors $F(y)e^{-xy}$ tend vers 0 quand y tend vers $+\infty$ car F admet une limite finie en $+\infty$ d'après (1) et e^{-xy} tend vers 0 quand y tend vers $+\infty$. De plus, comme la fonction F est bornée, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} F(t)e^{-xt}dt$ converge absolument par comparaison avec une intégrale exponentielle, et donc elle converge. Par passage à la limite quand y tend vers $+\infty$ dans la question (2), on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}f(t)dt$ converge.

Exercice 15.

(1) On part du fait que $f(n+1) \leq f(t) \leq f(n)$ pour tout $t \in [n, n+1]$, et on conclut par croissance de l'intégrale.

(2) Sommer la relation obtenue à la question (1).

(3) Utiliser le résultat de la question (2).

(4) Pour tous réels α, β, on définit *l'intégrale de Bertrand de paramètre* (α, β) par :
$$I_{\alpha,\beta} = \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha \ln^\beta(t)}.$$

(a) Appliquer le critère de négligeabilité avec une intégrale de Riemann. Au final, $I_{\alpha,\beta}$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha < 1$.

(b) La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x\ln^{\beta}(x)}$ admet pour primitive la fonction $F : x \longmapsto \dfrac{\ln^{1-\beta}(x)}{1-\beta}$. Conclure que $I_{1,\beta}$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

(c) A l'aide de la question (3), conclure que la série de Bertrand converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Exercice 16.

(1) Utiliser le critère de comparaison avec une intégrale de Riemann. On trouve que $h(0) = \dfrac{\pi}{2}$.

(2) (a) Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1.

(b) En utilisant la question précédente, montrer que $\left|\dfrac{h(x+\varepsilon)-h(x)}{\varepsilon} + \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-t^2x}}{1+t^2}dt\right|$ tend vers 0 quand ε tend vers 0, en procédant par des majorations sur les intégrales comme à l'exercice 9.

(3) Après calculs, on trouve que $h(x) - h'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2x}dt$. On effectue alors le changement de variable affine $u = \sqrt{x}t$ et on conclut en posant $A = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$.

(4) (a) Dériver la fonction $t \longmapsto -h(t)e^{-t}$, puis utiliser la question précédente et réintégrer le tout.

(b) Par croissance de l'intégrale, on trouve que, pour tout $x \geq 0$:

$$|h(x)| \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

En particulier, la fonction h est bornée sur $\mathbb{R}_+$. Comme e^{-x} tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

(c) D'après les questions précédentes, on trouve que :

$$\frac{\pi}{2} - A\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt = 0 \quad \text{et donc :} \quad \frac{\pi}{2} = A\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt.$$

A l'aide du changement de variable $t = u^2$, on trouve que $\dfrac{\pi}{2} = 2A^2$, et donc $A = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 17.

(1) Cf. cours de première année.

(2) On écrit que $F(x) = \int_0^{+\infty} f(t)dt - \int_0^x f(t)dt$, et donc $F'(x) = -f(x)$. Comme f est décroissante par hypothèse, la fonction f admet une limite (finie ou infinie) en $+\infty$. Dès lors, comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge, on trouve que cette limite en $+\infty$ est nulle. En particulier, on voit que $F' = -f$ est ≥ 0, et donc F est croissante. De plus, comme f est décroissante, on en déduit que F' est croissante, et donc F est convexe. Par ailleurs, comme $G'(x) = -\frac{f'(x)}{2\sqrt{x}} \leq 0$, il s'ensuit que G est décroissante. Enfin, comme f est décroissante, la fonction G' est croissante et G est convexe.

(3) Par croissance de l'intégrale, on trouve que :

$$0 \leq u^2G(u^2) = u^2F(u) = u^2\int_u^{+\infty} f(t)dt \leq \int_u^{+\infty} t^2f(t)dt.$$

On reconnaît à droite ci-dessus le reste d'une intégrale convergente. On conclut alors par encadrement.

(4) (a) Procéder par IPP, puis effectuer le changement de variable $t = \sqrt{x}$.

(b) Utiliser les questions (3) et (4)(a).

(5) (a) Faire un dessin pour le voir!

(b) Soit $\mathcal{T}$ la tangente à la courbe représentative de G au point M d'abscisse Q et d'ordonnée $P = G(Q)$, soit A le point d'intersection de $\mathcal{T}$ avec l'axe (Oy) et soit B le point d'intersection de $\mathcal{T}$ avec l'axe (Ox). Alors l'aire sous le graphe de G est $\geq$ à l'aire du triangle OAB car G est convexe, et donc on a avec la question précédente :

$$\int_0^B G(t)dt \geq 2\text{Aire}(OPMQ) \geq 2QG(Q).$$

Si l'on pose $Q = \mu^2$, alors on trouve que :

$$\int_0^B G(t)dt \geq 2\mu^2\int_\mu^{+\infty} f(t)dt.$$

Comme G est positive, ceci entraine que :

$$\int_0^{+\infty} G(t)dt \geq 2\mu^2 \int_\mu^{+\infty} f(t)dt.$$

On conclut alors avec la question $(4)(b)$.

Exercice 18.

(1) (a) Utiliser le critère de négligeabilité par rapport à une intégrale de Riemann.
(b) Montrer par IPP que $I_n = \frac{n}{a} I_{n-1}$.
(c) On trouve par récurrence et avec la question précédente que $I_n = \frac{n!}{a^{n+1}}$.

(2) L'intégrale I est faussement impropre en 0, et donc $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} e^{-at} dt$ converge absolument. De plus, on a pour tout $t \geq 1$:

$$\left| \frac{\sin(t)}{t} e^{-at} \right| \leq e^{-at}.$$

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-at} dt$ converge absolument par comparaison avec une intégrale exponentielle. On conclut avec la relation de Chasles.

(3) (a) Utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.
(b) Diviser l'inégalité de la question précédente par x, la multiplier par e^{-ax}, puis intégrer le tout et conclure par croissance de l'intégrale et d'après l'inégalité triangulaire.
(c) Montrer que $K_n I_{2n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et conclure en remplaçant I_{2k} par son expression trouvée à la question $(1)(c)$.

(4) (a) Utiliser les sommes de suites géométriques.
(b) Intégrer la relation de la question $(4)(a)$, puis majorer $\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$ par $\int_0^x t^{2n+2} dt \leq \frac{1}{2n+3}$.
(c) Par encadrement, on trouve que :

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}.$$

D'après la question $(3)(c)$, on sait que :

$$I = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{1}{a}\right)^{2k+1}}{2k+1}.$$

On en déduit que : $I = \arctan\left(\frac{1}{a}\right)$.

Exercice 19.

(1) (a) Pour tout $a > 1$, on trouve par IPP que :

$$\int_0^a \frac{\sin(t)dt}{x+t} = -\frac{\cos(a)}{a+x} + \frac{1}{x} - \int_0^a \frac{\cos(t)dt}{(x+t)^2}.$$

On conclut alors comme dans l'exercice 5.
(b) Procéder comme dans l'exercice 5.

(2) En posant $u = x + t$, on trouve que :

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u-x)}{u} du.$$

On conclut alors avec les formules d'addition pour sin et la linéarité de l'intégrale.

$$f(x) = \cos(x) \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du - \sin(x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du.$$

(3) (a) Posons $F(x) = \int_1^x \frac{\sin(u)}{u} du$, $G(x) = \int_1^x \frac{\cos(u)}{u} du$ et :

$$F_0 = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du \quad \text{et} \quad G(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du.$$

D'après la relation de Chasles, on trouve que, pour tout $x > 0$:

$$f(x) = \cos(x)(F(x) - F_0) + \sin(x)(G(x) - G_0).$$

F et G sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme primitives de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme et produits de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par dérivation, on a pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = -\cos(x)\int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}du - \sin(x)\int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}du.$$

(b) Les fonctions F et G sont $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme primitives de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme et produits de fonctions $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par dérivation, on a pour tout $x > 0$:

$$f''(x) = \frac{1}{x} + \sin(x)\int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}du - \cos(x)\int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}du.$$

(c) La relation à trouver est : $\forall x > 0,\ f''(x) = \dfrac{1}{x} - f(x)$.

(4) Les intégrales $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}du$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}du$ tendent vers 0 quand x tend vers $+\infty$ en tant que restes d'intégrales convergentes. Comme cos et sin sont bornées sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f tend vers 0 en $+\infty$.