TRAVAUX DIRIGÉS : ESPACES VECTORIELS (RÉPONSES - INDICATIONS)

1. Systèmes linéaires

Exercice 1.

(1) $\mathcal{S} = \left\{ \left(-\frac{9}{5}, -\frac{17}{5}, -\frac{1}{5} \right) \right\}$.

(2) $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{10}{11} + \frac{13}{11}t, \frac{5}{11} + \frac{12}{11}t, -\frac{2}{11} + \frac{15}{11}t, t \right),\ t \in \mathbb{R} \right\}$.

Exercice 2.

(1) $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{16}{3} - \frac{7}{3}z, \frac{1}{3} + \frac{5}{3}z, z \right),\ z \in \mathbb{R} \right\}$.

(2) $\mathcal{S} = \emptyset$.

Exercice 3.

(1) $\mathcal{S} = \emptyset$.

(2) $\mathcal{S} = \{(5 - 3t, -7 + 5t, -10 + 7t, t),\ t \in \mathbb{R}\}$.

2. Espaces vectoriels

Exercice 4.

(1) libre et génératrice dans $\mathbb{R}^3$, (2) ni libre, ni génératrice dans $\mathbb{R}^3$,

(3) libre et pas génératrice dans $\mathbb{R}^3$, (4) libre et génératrice dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5. Résoudre le système $\lambda u_n + \mu v_n + \delta w_n = 0$ obtenu pour $n = 0, 1, 2$.

Exercice 6. Procéder par récurrence en utilisant la dérivation une fois.

Exercice 7. Idem qu'avant en dérivant cette fois-ci deux fois.

Exercice 8.

(1) $\mathcal{B} = ((1, 0, 1), (0, 1, 1))$.

(2) $\mathcal{B} = ((-2, 1, 1))$.

(3) $\mathcal{B} = ((1, 3, 1, -2))$.

(4) $\mathcal{B} = ((8, 2, 5, 0), (-2, 2, 0, 5))$.

Exercice 9.

(1) $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = 3$.

(2) $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = 2$.

(3) $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = 3$.

(4) $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = 3$.

Exercice 10.

(1) Montrer que $\mathcal{B}$ est libre, que $\mathrm{card}(\mathcal{B}) = \dim \mathbb{R}^3$ et conclure.

(2) $\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}}(u_4) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(3) La famille (u_1, u_2, u_4) n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 11.

(1) A faire!

(2) $\mathcal{B}_F = ((-1, 1, 0, ..., 0), (-1, 0, 1, 0, ..., 0), ..., (-1, 0, ..., 0, 1))$, $\dim F = n - 1$, $\mathcal{B}_G = ((1, ..., 1))$, $\dim G = 1$.

(3) Vérifier que $\dim F + \dim G = n$, puis que F et G sont en somme directe et conclure.

Exercice 12.

(1) Montrer que (A, B, C, D) est libre et conclure avec le cardinal.

(2) $\mathfrak{mat}_{(A,B,C,D)}(E) = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$.

(3) $\text{rg}(A, B, C, F) = 3$ et (A, B, C, F) n'est pas une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 13.

(1) Vérifier notamment que E est stable par combinaisons linéaires.

(2) Montrer que : $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha 2^n + \beta 3^n$.

(3) $\mathcal{B}_E = ((2^n)_{n\in\mathbb{N}}, (3^n)_{n\in\mathbb{N}})$ et $\dim E = 2$.

Exercice 14.

(1) Exprimer F_0, F_1, F comme des Vect.

(2) Vérifier que ces familles sont libres et utiliser la question précédente.

(3) $\mathcal{B}_F = (x \longmapsto x(x-1), ..., x \longmapsto x^{n-1}(x-1))$. Vérifier que $E = F_0 + F_1$ avec la formule de Grassmann. Cette somme n'est pas directe.

Exercice 15.

(1) Vérifier entre autres que E_n est stable par combinaisons linéaires.

(2) $\mathcal{B}_{E_n} = \left(x \longmapsto x - \dfrac{1}{2}, ..., x \longmapsto x^n - \dfrac{1}{n+1}\right)$ et $\dim E_n = n$.

Exercice 16.

(1) Vérifier entre autres que F est stable par combinaisons linéaires.

(2) Penser à dériver $v'w - vw'$.

(3) Vérifier que $f''(x) = (1 + x^2)f(x)$ et $g''(x) = (1 + x^2)g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis que (f, g) est libre.

(4) Montrer que $\left(\dfrac{h}{f}\right)' = \dfrac{\lambda}{f^2}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$, puis intégrer cette relation.

(5) Montrer que (f, g) est une base de F, et que $\dim F = 2$.

Exercice 17.

(1) A faire!

(2) Montrer que $(L_0, ..., L_n)$ est libre et conclure avec le cardinal.

(3) $\mathfrak{mat}_{(L_0,...,L_n)}(P) = \begin{pmatrix} P(a_0) \\ P(a_1) \\ \vdots \\ P(a_n) \end{pmatrix}$.

(4) Appliquer la question précédente aux polynômes $P : x \longmapsto 1$ et $Q : x \longmapsto x$.

Exercice 18. Trouver d'abord des bases de F, G, H :

$$\mathcal{B}_E = (x \longmapsto x(x-1)(x-2)), \quad \mathcal{B}_F = (x \longmapsto (x-1)(x-2)(x-3)), \quad \mathcal{B}_G = (x \longmapsto 1, x \longmapsto x^2).$$

Vérifier ensuite que la concaténation de ces bases forme une base de $\mathbb{R}_3[x]$.

3. Exercices supplémentaires

Exercice 19.

(1) $\mathcal{S} = \emptyset$.

(2) $\mathcal{S} = \left\{(-y - 3t, y, 2t, t)\,,\ (y, t) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Exercice 20.

(1) $\mathcal{S}_a = \begin{cases} \left\{\left(\dfrac{2}{a-1}, \dfrac{1}{1-a}, \dfrac{1}{1-a}\right)\right\} & \text{si} \quad a \neq -2, 1 \\ \emptyset & \text{si} \quad a = 1 \\ \{(z-1, z, z),\ z \in \mathbb{R}\} & \text{si} \quad a = -2 \end{cases}.$

(2) $\mathcal{S}_a = \begin{cases} \left\{\left(1 + \dfrac{2}{(a-1)(a-2)}, -\dfrac{3}{(a-1)(a-2)}, \dfrac{1}{(a-1)(a-2)}\right)\right\} & \text{si} \quad a \neq 1, 2 \\ \{(2z+1, -3z, z),\ z \in \mathbb{R}\} & \text{si} \quad a = 1, 2 \end{cases}.$

Exercice 21. $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad m \neq \dfrac{1}{2} \\ 2 & \text{si} \quad m = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$

Exercice 22. En passant par le calcul du rang, vérifier que $(u_2 = 1, u_1, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $m \notin \{-1, 0, 2\}$.

Exercice 23.

(1) (a) A faire!
   (b) $\mathrm{rg}(u_1, u_2, u_3, u_4) = 3$. Cette famille n'est pas une base de $\mathbb{R}^4$.
   (c) Calculer le rang de $\mathcal{F}$ et conclure avec le cardinal.
   (d) $\mathfrak{mat}_{\mathcal{F}}(u_4) = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$

(2) (a) A faire!
   (b) $\mathcal{B}_H = ((-2, 1, 0, 0), (-3, 0, 1, 0), (-4, 0, 0, 1))$ et $\dim H = 3$.
   (c) $H \cap \mathrm{Vect}(u_3) = \{(0, 0, 0, 0)\}$. En déduire que $H + \mathrm{Vect}(u_3) = \mathbb{R}^4$.
   (d) $\mathcal{B}_{H \cap K} = ((-8, -2, -12, 8), (-9, -14, 11, 1))$ et $\dim H \cap K = 2$.
   (e) Utiliser Grassmann pour vérifier que $H + K = \mathbb{R}^4$. Cette somme n'est pas directe.

Exercice 24. $\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} \dfrac{P^{(0)}(a)}{0!} \\ \dfrac{P^{(1)}(a)}{1!} \\ \vdots \\ \dfrac{P^{(n)}(a)}{n!} \end{pmatrix}.$

Exercice 25.

(1) Soit k le plus petit entier tel que $\lambda_k \neq 0$. Commencer par factoriser P par $x \longmapsto (x-a)^k$.
(2) En supposant que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k = 0$, montrer que l'ordre de multiplicité de a est infini, et aboutir à une contradiction si tous les λ_k ne sont pas nuls. En déduire que $(P_0, ..., P_n)$ est libre, puis que c'est une base de $\mathbb{R}_n[x]$ à l'aide du cardinal.

Exercice 26. Résoudre le système $\lambda u_n + \mu v_n + \delta w_n = 0$ obtenu pour $n = 0, 1, 3$.

Exercice 27. Vérifier que $f_1 = f_3 - f_4$ et $f_2 = f_3 + f_4$. En déduire que (f_3, f_4) est une base de F et que $\dim F = 2$.

Exercice 28.

(1) Vérifier entre autres que F et G sont stables par combinaisons linéaires.
(2) Procéder par Analyse-Synthèse!

Exercice 29. Procéder comme à l'exercice précédent!

Exercice 30.

(1) (a) Vérifier entre autres que E_λ est stable par combinaisons linéaires.
(b) Dériver g et constater que $g' = 0$, puis conclure.
(c) $\mathcal{B}_{E_\lambda} = (x \longmapsto e^{\lambda x})$ et $\dim E_\lambda = 1$.

(2) (a) Procéder comme en $(1)(a)$!
(b) Vérifier que f_1 et f_2 appartiennent à F car $f_1'' - 5f_1' + 6f_1 = 0$ et $f_2'' - 5f_2' + 6f_2 = 0$. Montrer ensuite que (f_1, f_2) est libre.
(c) Calculer h' et h'' et conclure.
(d) Partant du fait que $h'' = h'$, écrire que $h'(x) = \alpha e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ d'après la question (1). Intégrer cette relation sous la forme $h(x) = \alpha e^x + \beta$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et conclure.
(e) $\mathcal{B}_F = (x \longmapsto e^{2x}, x \longmapsto e^{3x})$ et $\dim F = 2$.

Exercice 31.

(1) (a) A faire!
(b) Ecrire que $m_{i,n} = -m_{i,1} - ... - m_{i,n-1}$, puis reporter dans l'écriture de M si $M \in L_0$.
(c) Vérifier que la famille obtenue en $(1)(b)$ est une base de L_0, et en déduire que $\dim L_0 = n(n-1)$.

(2) (a) A vérifier par le calcul!
(b) Procéder par Analyse-Synthèse avec $(2)(a)$. En déduire que $\dim L = n^2 - n + 1$.

(3) (a) A vérifier!
(b) Montrer que la famille $(E_{i,j} - E_{i,n} - E_{n,j} + E_{n,n})_{1 \le i,j \le n-1}$ est une base de $L_0 \cap C_0$. En déduire que $\dim L_0 \cap C_0 = (n-1)^2$.

(4) (a) Commencer par écrire que : $M \in L \cap C \iff \exists K, K' \in \mathbb{R},\ M \in L_K \cap C_{K'}$. Vérifier ensuite en sommant les coefficients de M que $K = K'$, et conclure.
(b) Montrer que $L \cap C = \mathrm{Vect}(I_n) \oplus (L_0 \cap C_0)$, et en déduire que $\dim L \cap C = (n-1)^2 + 1$.

Exercice 32.

(1) (a) Partant d'une relation de la forme $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k S_k$, évaluer cette relation en $x = 0, 1, ..., n-1$, ou alors utiliser le fait que la famille $(S_k)_{0 \le k \le n}$ est échelonnée en degrés.
(b) Vérifier que $(S_k)_{0 \le k \le m}$ est une base de $\mathbb{R}_m[x]$ et conclure.

(2) (a) $S_k(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ 0 \le n \le k-1 \\ \dfrac{n!}{(n-k)!} & \text{si } \ n \ge k \end{cases}$.
(b) (i) Utiliser la question $(2)(a)$!
(ii) Conclure en obtenant une combinaison linéaire de sommes partielles de séries exponentielles (à un décalage d'indice près). On trouve que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!} = e \sum_{k=0}^{+\infty} a_k.$$

(c) Considérer le polynôme $P : x \longmapsto x^2(x-1)...(x-p)$ pour justifier la convergence avec la question $(2)(b)$. On trouve $S = pe$.

Exercice 33. Soit $\lambda_1, ..., \lambda_n$ des réels tels que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f^k = 0$. Si l'on pose $P : x \longmapsto \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x^k$, alors on voit que $P(f) = 0$, c'est-à-dire ; $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(f(x)) = 0$. En particulier, $f(x)$ est racine de P pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, $f(\mathbb{R})$ est un intervalle d'après le TVI. Si $P \neq 0$, alors P admet un nombre fini de racines. Donc $f(\mathbb{R})$ est un singleton, impossible car f n'est pas constante par hypothèse. Conclure.