## TRAVAUX DIRIGÉS : ESPACES PROBABILISÉS (RÉPONSES - INDICATIONS)

**Exercice 1.** La proba vaut $\dfrac{n!}{n^n}$.

**Exercice 2.** La proba vaut $\dfrac{p^2q}{(p+q)(p+q-1)(p+q-2)}$.

**Exercice 3.**

(1) La proba d'avoir tiré une boule blanche vaut $\dfrac{7}{24}$.

(2) La proba d'avoir obtenu face sachant qu'on a tiré une boule blanche vaut $\dfrac{3}{7}$.

**Exercice 4.** La proba d'ouvrir la porte au $k$-ème essai est toujours égale à $\dfrac{1}{15}$.

**Exercice 5.**

(1) La proba que la première boîte soit vide vaut $\left(\dfrac{2}{3}\right)^4$.

(2) La proba que la première boîte ou la deuxième boîte soit vide vaut $\dfrac{31}{81}$.

**Exercice 6.**

(1) On trouve que : $\forall n \geq 1$, $p_n = (a+b-1)p_{n-1} + 1 - b$.

(2) On a : $\forall n \geq 0$, $p_n = \left(\dfrac{1-a-b}{2-a-b}\right)(a+b-1)^n + \dfrac{1-b}{2-a-b}$.

(3) La proba que l'appareil ne tombe jamais en panne vaut 0.

**Exercice 7.** On lance simultanément deux dés jusqu'à ce qu'une somme de 5 ou 7 apparaisse. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $E_n$ l'événement "une somme de 5 apparaît au $n$-ème lancer et sur les $(n-1)$ premiers lancers, ni la somme de 5 ni celle de 7 n'apparaît".

(1) On trouve que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(E_n) = \dfrac{4}{36}\left(\dfrac{26}{36}\right)^{n-1}$.

(2) La proba que le jeu s'arrête sur une somme de 5 vaut $\dfrac{2}{5}$.

(3) La proba que le jeu s'arrête sur une somme de 7 vaut $\dfrac{3}{5}$.

(4) La proba que le jeu ne s'arrête jamais vaut 0.

**Exercice 8.** On trouve que ; $\forall n \geq 1$, $P(A_n) = \dfrac{1}{2}$.

**Exercice 9.** La proba que $A$ tire une boule rouge le premier vaut $\dfrac{7}{12}$.

**Exercice 10.** A démontrer par récurrence!

**Exercice 11.** La proba d'avoir choisi la 5-ème pièce vaut $\dfrac{1}{9}$.

**Exercice 12.** On lance une pièce équilibrée.

(1) On trouve que $P(A_n) = \dfrac{n+1}{2^n}$ et $P(B_n) = 1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$. De plus, $A_n$ et $B_n$ sont indépendants si et seulement si $n = 3$.

(2) On trouve que $P(A) = 0$ et $P(B) = 1$, et donc $A$ et $B$ sont indépendants.

**Exercice 13.** La proba d'obtenir une boule blanche vaut $\frac{1}{3}$.

**Exercice 14.**

(1) On trouve que $p_n = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
(2) On a $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1$.

**Exercice 15.**

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'événement $E_n$ : "la famille a exactement $n$ enfants". Utiliser alors le fait que $(E_n)_{n\geq 0}$ est un système complet d'événements.
(2) La proba qu'une famille ait exactement $N$ filles vaut $\frac{\alpha\left(\frac{p}{2}\right)^N}{\left(1-\frac{p}{2}\right)^{N+1}}$ (utiliser la formule du binôme négatif).

**Exercice 16.**

(1) Utiliser la convexité de la fonction exponentielle.
(2) (a) Utiliser le fait que l'indépendance passe au contraire et le résultat de la question (1).
   (b) On trouve que $P(A_k) = 0$ si $k < 10$ et $P(A_k) = \frac{1}{k}$ si $k \geq 10$.
   (c) La proba que la boule 10 sorte au moins une fois à partir du $n$-ème tirage vaut 1.
   (d) La proba que la boule 10 sorte une infinité de fois vaut 1.
   (e) La proba que la boule 10 sorte une infinité de fois de suite vaut 0.
(3) (a) A démontrer par récurrence sur $l \geq 1$.
   (b) La proba que le numéro 10 sorte une infinité de fois vaut 0.

**Exercice 17.**

(1) On trouve que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+2} = \frac{1}{2}p_{n+1} + \frac{1}{4}p_n$.
(2) Utiliser le fait que les racines de l'équation caractéristique ont une valeur absolue $< 1$.

## 1. Exercices supplémentaires

**Exercice 18.**

(1) La proba que les 4 boules choisies soient de la même couleur vaut $\frac{17}{84}$.
(2) La proba d'obtenir 2 boules blanches et 2 boules noires vaut $\frac{25}{63}$.

**Exercice 19.**

(1) La proba d'obtenir face au premier lancer vaut $\frac{3}{4}$.
(2) La proba d'avoir choisi la pièce truquée sachant qu'on a obtenu face au premier lancer vaut $\frac{2}{3}$.
(3) La proba de n'obtenir que des faces aux $n$ lancers vaut $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.
(4) On trouve que $p_n = \frac{1}{1+\frac{1}{2^n}}$.
(5) $\lim_{n\to+\infty} p_n = 1$.

**Exercice 20.** La proba qu'un sujet dont le test est négatif soit atteint par la maladie vaut $\frac{2}{1883}$.

**Exercice 21.** La proba que le document se trouve dans le dernier tiroir sachant qu'il n'est pas dans les 4 premiers vaut $\frac{p}{5-4p}$.

**Exercice 22.**

(1) La proba d'obtenir un perdant lors de cette expérience vaut $\frac{n}{2^{n-1}}$.

(2) La proba d'obtenir le premier perdant à la $i$-ème expérience vaut $\dfrac{n}{2^{n-1}}\left(1-\dfrac{n}{2^{n-1}}\right)^{i-1}$.

**Exercice 23.** Un mobile se déplace aléatoirement dans l'ensemble des sommets d'un triangle $ABC$. Si, à l'étape $n$, il est sur un sommet, alors à l'étape suivante $n+1$, il peut soit rester sur le même sommet avec la probabilité $2/3$, soit se placer sur l'un des 2 autres sommets avec la même probabilité. On désigne par $A_n$ (resp. $B_n$ et $C_n$) l'événement "Le mobile se trouve en $A$ (resp. $B$ et $C$) à l'étape $n$", et par $a_n$ (resp. $b_n$ et $c_n$) sa probabilité.

(1) On voit que $a_n + b_n + c_n = 1$.
(2) Avec la formule des probas totales, on trouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\left\{\begin{array}{lll} a_{n+1} & = & \dfrac{2}{3}a_n + \dfrac{1}{6}b_n + \dfrac{1}{6}c_n \\ & & \\ b_{n+1} & = & \dfrac{1}{6}a_n + \dfrac{2}{3}b_n + \dfrac{1}{6}c_n \\ & & \\ c_{n+1} & = & \dfrac{1}{6}a_n + \dfrac{1}{6}b_n + \dfrac{2}{3}c_n \end{array}\right. .$$

(3) Vérifier avec la question précédente que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont géométriques de raison $\dfrac{1}{2}$.
(4) On trouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\left\{\begin{array}{lll} a_n & = & \dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{1}{2^{n-1}}\right) \\ & & \\ b_n & = & \dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right) \\ & & \\ c_n & = & \dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right) \end{array}\right. .$$

**Exercice 24.**

(1) (a) La proba de jouer avec la pièce équilibrée après le premier lancer vaut $\dfrac{5}{12}$.
(b) La proba d'obtenir "face" au $n$-ème lancer vaut $\dfrac{43}{72}$.
(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} P(F_n) = \dfrac{43}{72}$.

(2) On lance une pièce. Si le résultat est "face", on rejoue avec la même pièce. Si le résultat est "pile", on change de pièce. Mais désormais, on procède ainsi à chaque tirage. Soit $F_n$ l'événement "on obtient "face" au $n$-ème lancer" et soit $T_n$ l'événement "on joue avec la pièce truquée au $n$-ème lancer".
(a) On trouve que, pour tout $n \geq 1$ : $P(T_{n+1}) = \dfrac{1}{6}P(T_n) + \dfrac{1}{2}$.
(b) On trouve que, pour tout $n \geq 1$ : $P(T_n) = \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1} + \dfrac{3}{5}$.
(c) La proba d'obtenir "face" au $n$-ème lancer vaut $\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n} + \dfrac{3}{5}$.
(d) $\lim\limits_{n\to+\infty} P(F_n) = \dfrac{3}{5}$.

(3) On vérifie que $\dfrac{43}{72} < \dfrac{3}{5}$. Donc la deuxième stratégie est la meilleure à long terme pour obtenir "face".

**Exercice 25.**

(1) $P(A_1) = \dfrac{1}{2}$ et $P(A_n) = \dfrac{n}{2^{n+1}}$ pour tout $n \geq 2$.
(2) $P(A) = 1$.
(3) $P(B) = \dfrac{1}{2}$.

**Exercice 26.** La proba que la somme des numéros des boules tirées soit strictement supérieure à celle des boules restantes vaut $\dfrac{1}{2}$.

**Exercice 27.**

(1) La proba $p_n$ qu'il reste $k$ bonbons dans l'autre poche sachant que l'enfant ne trouve plus de bonbons dans la poche qu'il a choisie est donnée par :

$$p_n = \binom{2N-k}{N}\left(p^{N+1}q^{N-k} + q^{N+1}p^{N-k}\right).$$

(2) La proba qu'il n'y ait plus de bonbon dans les deux poches simultanément vaut $\binom{2N}{N}p^N q^N$.

(3) On trouve que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} 2^k \binom{2N-k}{N} = 2^{2N}$.

**Exercice 28.**

(1) Montrer que $U_n \subset U_{n+1}$, et donc la suite $(u_n)$ est croissante et majorée. En particulier, elle converge.

(2) (a) On trouve que $P(B_n) = \frac{1}{8}$.
  (b) Tout d'abord, les événements $B_n$ et $B_{n+1}$ sont incompatibles car on ne peut pas avoir à la fois "pile" et "face" au $n$-ème lancer. Idem pour $B_n, B_{n+2}$ et $B_{n+1}, B_{n+2}$.
  (c) On trouve que $u_3 = \frac{1}{8}$, $u_4 = \frac{1}{4}$, $u_5 = \frac{3}{8}$.

(3) (a) Comme $U_n = U_{n-2} \cup B_{n-1} \cup B_n$, on conclut avec la question (2)($b$) que $U_n \cap B_{n+1} = U_{n-2} \cap B_{n+1}$.
  (b) Comme $U_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}$, on trouve que :

$$P(U_{n+1}) = P(U_n) + P(B_{n+1}) - P(U_n \cap B_{n+1}) = P(U_n) + P(B_{n+1}) - P(U_{n-2} \cap B_{n+1}).$$

  On conclut alors avec l'indépendance de $U_{n-2}$ et $B_{n+1}$.
  (c) On trouve que $l = 1$.

(4) (a) $\beta = 8$ et $\gamma = -8$.
  (b) Montrer en sommant que, pour tout $n \geq 1$ :

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = \beta\left(v_{n+2} + v_{n+1} - v_0 - v_1\right) + \gamma\left(v_{n+3} + v_{n+2} + v_{n+1} - v_0 - v_1 - v_2\right).$$

  Vérifier avec la question (3)($c$) que la suite $(v_n)$ converge vers 0. Donc la série $\sum v_n$ et de plus :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = 8.$$

**Exercice 29.**

(1) A faire!

(2) A faire à l'aide de la question (1), en distinguant les cas "$n$ pair" et "$n$ impair". Comme la suite $(u_{n+1})$ converge vers 0, on en déduit que la suite des sommes partielles $(S_n)$ converge vers $S$, et donc la série $\sum(-1)^n u_n$ converge et a pour somme $S$.

(3) (a) On trouve que $a_2 = 1$ et $a_3 = 2$.
  (b) (i) A démontrer par récurrence sur $n$ avec la relation donnée au début de la question (3)($b$).
    (ii) On trouve que $p_n = \frac{a_n}{n!} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
    (iii) Comme $\frac{1}{e} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$, on en déduit avec la question (2) que la condition à trouver sur $n$ est $(n+1)! \geq 10^3$, soit $n \geq 6$.