TRAVAUX DIRIGÉS : SÉRIES NUMÉRIQUES

Exercice 1. Etudier la nature des séries données par :

$$(1)\ \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n+\ln(n)}\quad,\quad (2)\ \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^n}\quad,\quad (3)\ \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n2^n}\quad,\quad (4)\ \sum_{n\geq 1}(1-\sqrt[n]{n})\quad,$$

$$(5)\ \sum_{n\geq 1}\frac{\cos(n)}{n^2\sqrt{n}}\quad,\quad (6)\ \sum_{n\geq 1}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)^2\quad,\quad (7)\ \sum_{n\geq 1}n^2e^{-n}\quad,\quad (8)\ \sum_{n\geq 1}\frac{n!}{n^n}\quad,$$

$$(9)\ \sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)\quad,\quad (10)\ \sum_{n\geq 1}\frac{\ln(n)}{n!}\quad,\quad (11)\ \sum_{n\geq 0}e^{-\sqrt{n}}\quad,\quad (12)\ \sum_{n\geq 1}\frac{n^2-5}{n(2n+1)}\quad,$$

$$(13)\ \sum_{n\geq 1}\frac{n-2}{2^n-1}\quad,\quad (14)\ \sum_{n\geq 1}\frac{\sqrt[n]{2}-1}{2n+3}\quad,\quad (15)\ \sum_{n\geq 0}n\sin\left(\frac{1}{3^n}\right)\quad,\quad (16)\ \sum_{n\geq 0}\frac{n}{n+1}\quad,$$

$$(17)\ \sum_{n\geq 1}\frac{\cos(n!)}{n^3+\cos(n!)}\quad,\quad (18)\ \sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\quad,\quad (19)\ \sum_{n\geq 1}e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\quad,\quad (20)\ \sum_{n\geq 1}\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\quad.$$

Exercice 2. Etudier la nature des séries $\sum\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^a$ et $\sum\ln\left(1+\dfrac{1}{n^a}\right)$ en fonction de $a\in\mathbb{R}$.

Exercice 3. A l'aide des développements limités, étudier la nature des séries $\sum 2\ln(n^3+n^2)-3\ln(n^2+n)$, $\sum\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}$ et $\sum 2+n\ln\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)$.

Exercice 4. Soit $p\in\mathbb{N}$. Montrer que les séries suivantes convergent et calculer leur somme :

$$(1)\ \sum_{n\geq 0}\frac{n(n-1)}{3^n}\quad,\quad (2)\ \sum_{n\geq 0}\frac{n^2}{3^n.n!}\quad,\quad (3)\ \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2+n}\quad,\quad (4)\ \sum_{n\geq 0}\binom{n}{2}e^{-n}\quad,$$

$$(5)\ \sum_{n\geq 0}\frac{2}{3^{n+1}}\quad,\quad (6)\ \sum_{n\geq 0}\frac{4^n}{(2n)!}\quad,\quad (7)\ \sum_{n\geq 0}\frac{2n(n+1)}{4^n}\quad,\quad (8)\ \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{n^2+3}{5^n}\quad,$$

$$(9)\ \sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)}{n!}\quad,\quad (10)\ \sum_{n\geq 0}\frac{\binom{n}{p}}{n!}\quad,\quad (11)\ \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\quad,\quad (12)\ \sum_{n\geq 0}\frac{2^n(n^2+1)}{n!}\quad,$$

$$(13)\ \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n2^n}{(n+1)!}\quad,\quad (14)\ \sum_{n\geq 0}\frac{n^2+n+1}{n!}\quad,\quad (15)\ \sum_{n\geq 2}\ln\left(\frac{n^3}{(n+2)(n-1)^2}\right)\quad,\quad (16)\ \sum_{n\geq 1}\ln\left(\frac{\cos(\frac{1}{n})}{\cos(\frac{1}{n+1})}\right)\quad.$$

Exercice 5. Montrer que, si la série numérique $\sum u_n$ converge absolument, alors $\sum u_n^2$ converge.

Exercice 6. (Critère spécial des séries alternées) Etant donnée une suite $(a_k)_{k\geq 1}$ décroissante de limite nulle, on se propose d'étudier la nature de la série $\sum_{k\geq 1}(-1)^k a_k$. Pour ce faire, on pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$u_n=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k a_k\quad\text{et}\quad v_n=\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^k a_k.$$

(1) Etudier la convergence des suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$.
(2) En déduire que $\sum_{k\geq 1}(-1)^k a_k$ converge. *Ce résultat est appelé le critère spécial des séries alternées.*
(3) Etudier la convergence et l'absolue convergence des séries $\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^k}{k}$ et $\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$.
(4) A l'aide d'un développement limité, montrer que la série $\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+(-1)^k}$ diverge.

Exercice 7. (Constante d'Euler) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ et $v_n = u_{n+1} - u_n$.

(1) A l'aide d'un développement limité, déterminer un équivalent de v_n en $+\infty$.
(2) Montrer que la série de terme général v_n converge.
(3) En déduire que la suite de terme général u_n converge.
La limite de cette suite, communément notée γ, est appelée la constante d'Euler. Elle vaut $\simeq 0.5772$.

Exercice 8. (Règle de D'Alembert) Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe un réel $l \geq 0$ tel que : $\frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

(1) On suppose dans cette question que $l < 1$, et soit $q \in]l, 1[$ un réel fixé.
  (a) Justifier qu'il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a : $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$.
  (b) Montrer que, pour tout $n \geq n_0$, on a : $a_n \leq a_{n_0} q^{n-n_0}$.
  (c) En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge.
(2) On suppose dans cette question que $l > 1$, et soit $q \in]1, l[$ un réel fixé.
  (a) Justifier qu'il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a : $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q$.
  (b) En déduire que la suite (a_n) est croissante à partir d'un certain rang.
  (c) Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 1} a_n$? Justifier.
Les résultats trouvés en (1)(c) et (2)(c) constituent ce que l'on appelle la règle de D'Alembert.
(3) Etudier la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{1.3....(2n-1)}$.

Exercice 9. (ESCP 2009) Soit (a_n) une suite réelle décroissante de limite nulle. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $b_n = n(a_{n-1} - a_n)$. Dans cet exercice, on se propose de comparer la nature des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$.

(1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k - na_n$.
(2) Dans cette question, on suppose que la série de terme général a_n converge.
  (a) Montrer que la série $\sum b_n$ converge, puis que la suite (na_n) converge.
  (b) Etablir que la suite (na_n) tend vers 0, et en déduire que : $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.
(3) Dans cette question, on suppose que la série de terme général b_n converge.
  (a) Montrer que, pour tous $n, k \in \mathbb{N}^*$, on a : $n(a_n - a_{n+k}) \leq \sum_{j=n+1}^{n+k} b_j$.
  (b) En déduire que la série $\sum a_n$ converge et que : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Exercice 10. (Produit infini - ESCP 2021) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle. On dit que le produit $\prod_{n\geq 1} u_n$ converge si la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$ admet une limite finie non nulle l, et l'on pose alors :

$$l = u_1 \times u_2 \times u_3 \times ... = \prod_{k=1}^{+\infty} u_k.$$

(1) Dans cette question, on suppose que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'équivalence entre les trois propositions suivantes :
  (a) le produit $\prod_{n\geq 1}(1 + u_n)$ converge;
  (b) la série $\sum_{n\geq 1} \ln(1 + u_n)$ converge;
  (c) la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.
(2) Dans cette question, on suppose que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est à valeurs > -1 et que la série $\sum_{n\geq 1} u_n^2$ converge.
  (a) Montrer qu'il existe $C > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tels que : $\forall n \geq N$, $|\ln(1 + u_n) - u_n| \leq Cu_n^2$.
  (b) En déduire que le produit $\prod_{n\geq 1}(1 + u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.
(3) Dans cette question, pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n = \cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$ avec $x \in]0, \pi[$ et $v_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$.
  (a) On pose $w_n = v_n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. A l'aide de la relation $\sin(2y) = 2\sin(y)\cos(y)$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$w_n = \frac{\sin(x)}{2^n}.$$
  (b) En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n\geq 1}$.
  (c) En déduire l'égalité suivante : $\dfrac{2}{\pi} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \times \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \times ...$

Exercice 11. (HEC 2014) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $u_n = \ln(n) + a\ln(n + 1) + b\ln(n + 2)$.

(1) Déterminer a et b pour que la série de terme général u_n soit convergente (*indication : calculer un développement limité du terme général u_n quand n tend vers $+\infty$*).
(2) Calculer la somme de cette série dans ce cas.

1. Exercices supplémentaires

Exercice 12. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exercice 13. (Formule de Stirling) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{n^n e^{-n}}{n!}$ et $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

(1) A l'aide d'un développement limité, déterminer un équivalent de v_n en $+\infty$.
(2) Montrer que la série de terme général v_n diverge.
(3) En déduire que la suite (u_n) converge. Quelle est sa limite?
(4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = u_n\sqrt{n}$ et $b_n = \ln(a_{n+1}) - \ln(a_n)$.
  (a) A l'aide d'un développement limité, déterminer un équivalent de b_n en $+\infty$.
  (b) Montrer que la série de terme général b_n converge.
  (c) En déduire que la suite (a_n) converge vers un réel $C > 0$.
  (d) En déduire un équivalent de $n!$ en $+\infty$ en fonction de C, n.
  Cet équivalent de $n!$ en $+\infty$ est appelée la formule de Stirling, et l'on peut montrer que $C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Exercice 14. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t)dt$.

(1) (a) Calculer les valeurs de u_0, u_1, u_2.
  (b) Etudier la monotonie de la suite (u_n), et en déduire qu'elle converge.
  (c) Calculer $u_{n+2} + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en déduire la limite de (u_n).
(2) (a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, on a : $\frac{1}{2(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$.
  (b) En déduire un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.
  (c) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.
(3) (a) A l'aide de la question (1)(c), montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{2p} = (-1)^p\left(u_0 + \sum_{k=1}^{p}\frac{(-1)^k}{2k-1}\right) \quad \text{et} \quad u_{2p+1} = (-1)^p\left(u_1 + \sum_{k=1}^{p}\frac{(-1)^k}{2k}\right).$$

  (b) En déduire que les séries $\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^k}{2k-1}$ et $\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^k}{k}$ convergent et donner leurs sommes.

Exercice 15. (Produit de Cauchy) Etant données deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes positifs, on considère la suite réelle $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

(1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} w_k \leq \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right) \leq \sum_{k=0}^{2n} w_k.$$

(2) En déduire que, si les séries $\sum_{k\geq 0} u_k$ et $\sum_{k\geq 0} v_k$ convergent, de sommes respectives U et V, alors la série $\sum_{k\geq 0} w_k$ converge, de somme UV.
(3) Pour tout $n \geq 0$, on pose $w_n = 2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{4^k}{k!}$. Montrer que $\sum_{n\geq 0} w_n$ converge et calculer sa somme.

Exercice 16. (ESCP 2014) Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $f_0 = f_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$.

(1) Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ une série à termes strictement positifs telle que la suite $(\frac{a_{n+1}}{a_n})_{n\geq 0}$ converge vers un réel $l < 1$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge.
(2) Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ est à valeurs strictement positives.
(3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$.
  (a) Expliciter une fonction rationnelle φ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.
  (b) Déterminer le sens de variation de φ sur $\mathbb{R}_+^*$.
(4) (a) Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\geq 1}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 1}$ sont monotones et convergentes, et déterminer leurs limites respectives.
  (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (*que l'on appelle le nombre d'or*).
(5) On pose $R = \frac{1}{\Phi}$. De plus, pour tout réel x pour lequel la série $\sum_{n\geq 0} f_n x^n$ converge, on pose :

$$A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n x^n, \quad A_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n x^{n+2}, \quad A_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_{n+1} x^{n+2}, \quad A_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_{n+2} x^{n+2}.$$

(a) Montrer que, pour tout $x \in]-R, R[$, la série définissant $A(x)$ converge absolument.
(b) Exprimer $A_0(x), A_1(x), A_2(x)$ en fonction de $A(x)$ pour tout $x \in]-R, R[$.
(c) En déduire l'expression de $A(x)$ en fonction de x pour tout $x \in]-R, R[$.

Exercice 17. (HEC 2015) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite convergente à termes strictement positifs et de limite nulle. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ et $v_n = \frac{u_{n+1}}{S_n}$.

(1) Montrer que, pour tout $k \geq 1$, on a : $\int_{S_k}^{S_{k+1}} \frac{dt}{t} \leq v_k$.
(2) Etudier la nature de la série $\sum_{k\geq 1} v_k$ en fonction de la nature de la série $\sum_{k\geq 1} u_k$.
(3) Quel résultat obtient-on dans le cas où $u_n = \frac{1}{n}$?

Exercice 18. (ESCP 2019) On admet que $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

(1) Montrer que la série $\sum_{p\geq 1} \frac{(-1)^{p+1}}{p^2}$ converge et donner sa somme.
(2) (a) Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$ et pour tout entier $p \geq 1$, on a :
$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + (-1)^{p+1} \int_0^x \frac{t^{p+1}}{1+t} dt$$
(*indication : calculer* $1 + t + t^2 + ... + t^p$).
(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Montrer que, pour tout entier $p \geq 1$ et pour tout $x \in [0, 1]$, on a :
$$\ln(1+x^n) = \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k+1} \frac{x^{nk}}{k} + R_p(x) \quad \text{avec} \quad |R_p(x)| \leq \frac{1}{p+2}.$$
(3) (a) Montrer que $\int_0^1 \ln(1+x^n)dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(nk+1)}$.
(b) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\left| n \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(nk+1)} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \right| \leq \frac{C}{n}.$$
(c) En déduire un équivalent de $I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n)dx$ quand n tend vers $+\infty$.
(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}$. Déduire de la question précédente que :
$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\ln(2)}{n} + \frac{\pi^2}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 19. (HEC 2019)

(1) (a) Question de cours : minorant et minimum d'une partie non vide de $\mathbb{R}$.
(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, justifier que l'ensemble $\{|x-n|; n \in \mathbb{Z}\}$ admet un minimum.
(2) On note f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) = \min\{|x-n|; n \in \mathbb{Z}\}$.
(a) Calculer $f(x)$ lorsque x est compris entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$.
(b) Tracer la courbe représentative de f (*indication : vérifier que la fonction f est 1-périodique*).
(3) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
(a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a : $f(x) \leq |y-n| + |x-y|$.
(b) Etablir l'inégalité : $|f(y) - f(x)| \leq |y-x|$.
(4) (a) Justifier pour tout $x \in \mathbb{R}$ la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} 2^{-n} f(2^n x)$.

Par la suite, on note b l'application définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $b(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} f(2^n x)$.

(b) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Justifier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les inégalités :
$$|b(y) - b(x)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} 2^{-k} |f(2^k y) - f(2^k x)| + 2^{-n} \leq n|y-x| + 2^{-n}.$$
(c) En déduire que la fonction b est continue (*indication : utiliser la question (4)(b) et la définition axiomatique de la continuité en un point d'une fonction*).
(d) Démontrer que la fonction b n'est pas dérivable à droite en 0 (*indication : montrer que $b(2^{-n}) = n2^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*).