Lycée Clemenceau **Jeudi 7 novembre 2024**
ECG 2 **Durée : 4 heures**

Devoir Surveillé de Mathématiques $n^o 2$

Remarques : *Il est toujours permis d'admettre les résultats de questions précédentes pour traiter les questions suivantes. Chaque réponse doit être démontrée et toutes les étapes des calculs doivent être données. On attachera un soin tout particulier à la clareté et à la propreté de la rédaction. Les téléphones portables et les calculatrices, ainsi que tous matériels électroniques sont interdits.*

Exercice 1. Etant donnés deux réels a, b, on considère les suites $(u_k)_{k\geq 0}$ et $(v_k)_{k\geq 0}$ telles que $u_0 = a$, $v_0 = b$ et telles que, pour tout entier $k \geq 0$, on ait $u_{k+1} = 1 + u_k + v_k$ et $v_{k+1} = 2 - 3u_k + 4u_k v_k$. Compléter la fonction en Python suivante qui, étant donnés des réels a, b et un entier $n \geq 0$, calcule u_n et v_n.

```
def suite(n,a,b):
    u=a
    v=b
    if n==0:
        ---------
    else:
        for ------
            w= ---------
            u= ---------
            v= ---------
        -------
```

Exercice 2. Ecrire une fonction en Python qui, étant donné un entier $n \geq 1$, calcule le réel $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{kl}$.

Exercice 3. On admet que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{2k+1}$ converge et que sa somme est égale à $\dfrac{\pi}{4}$.

(1) Ecrire une fonction en Python qui, étant donné un entier $n \geq 0$, calcule et affiche la somme :
$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

(2) En déduire une fonction en Python qui, étant donné un réel $\varepsilon > 0$, calcule et affiche le plus petit entier $n \geq 0$ tel que :
$$\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1} - \frac{\pi}{4}\right| \leq \varepsilon.$$

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans cet exercice, on se propose de déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[x]$ vérifiant l'équation $(\mathcal{E}_n)$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) + P(x+1) = 2x^n$.

(1) Soit Φ l'application qui, à tout élément Q de $\mathbb{R}[x]$, associe le polynôme $\Phi(Q) : x \longmapsto Q(x) + Q(x+1)$.
  (a) Etablir que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[x]$.
  (b) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on désigne par Φ_p la restriction de Φ à $\mathbb{R}_p[x]$, c'est-à-dire l'application définie pour tout $P \in \mathbb{R}_p[x]$ par $\Phi_p(P) = \Phi(P)$.
    (i) Montrer que Φ_p est un endomorphisme de $\mathbb{R}_p[x]$.
    (ii) Etablir que la matrice de Φ_p dans la base canonique $\mathcal{B}_p = (x \longmapsto 1, x \longmapsto x, ..., x \longmapsto x^p)$ de $\mathbb{R}_p[x]$ est triangulaire supérieure, et donner ses coefficients diagonaux.
    (iii) En déduire que Φ_p est un isomorphisme de $\mathbb{R}_p[x]$ dans $\mathbb{R}_p[x]$.
  (c) Prouver que Φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}[x]$ dans $\mathbb{R}[x]$.
  (d) Montrer qu'il existe un unique polynôme $E_n \in \mathbb{R}[x]$ vérifiant l'équation $(\mathcal{E}_n)$.
  (e) Préciser le degré de E_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

(2) Dans cette question, on pose $E_n : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}x^k$.
  (a) Vérifier l'égalité suivante pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$E_n(x+1) + E_n(x) = \sum_{j=0}^{n}\left[a_{n,j} + \sum_{k=j}^{n}\binom{k}{j}a_{n,k}\right]x^j.$$

(b) En déduire le système linéaire dont les $a_{n,k}$ sont les solutions, puis préciser la valeur de $a_{n,n}$.
(c) Déterminer les polynômes E_0, E_1, E_2.
(d) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $E_n'(x) = nE_{n-1}(x)$.
(e) En déduire l'expression de la dérivée k-ème $E_n^{(k)}$ de E_n.
(f) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $E_n(x) = (-1)^n E_n(1-x)$.
(g) En déduire, pour tout entier pair $n > 0$, les valeurs de $E_n(0)$ et $E_n(1)$.
(h) En déduire, pour tout entier impair n, la valeur de $E_n(\frac{1}{2})$.
(i) Déterminer les polynômes E_3 et E_4.

Exercice 5. Soit A un élément de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et soit I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Pour tout polynôme $P : x \longmapsto a_0 + a_1 x + ... + a_m x^m$ de $\mathbb{R}[x]$, on pose $P(A) = a_0 I + a_1 A + ... + a_m A^m$. Par la suite, on admet que, pour tous polynômes $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ et pour tous réels λ, μ, on a $(\lambda P + \mu Q)(A) = \lambda P(A) + \mu Q(A)$ et $(PQ)(A) = P(A)Q(A)$. Dans cet exercice, on se propose de déterminer explicitement le terme général de la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1$ et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n$. Pour ce faire, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}.$$

(1) Ecrire une fonction en Python qui, étant donné un entier $n \geq 0$, calcule et affiche u_n.
(2) (a) Ecrire la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, indépendante de n, telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
(b) Vérifier que $(A - I)^2(A - 2I) = 0$.
(3) On considère le polynôme P de $\mathbb{R}[x]$ défini par : $P : x \longmapsto (x-1)^2(x-2)$.
(a) Justifier l'existence et l'unicité d'un couple $(Q_n, R_n) \in \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}_2[x]$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x^n = P(x)Q_n(x) + R_n(x).$$

(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists (a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $R_n(x) = a_n + b_n(x-1) + c_n(x-1)^2$.
(c) Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $a_n = 1$, $b_n = n$, $c_n = 2^n - n - 1$.
(4) (a) A l'aide de la question précédente, écrire la matrice A^n comme combinaison linéaire des matrices $I, A - I, (A - I)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(b) Donner la troisième ligne de la matrice A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(5) (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $X_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
(b) En déduire l'expression de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Problème 1. Dans ce problème, on se propose d'étudier une fonction définie par une intégrale.

Partie I : étude d'une fonction f

(1) Montrer que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$ converge.

On note $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $x \in]0, +\infty[$ par : $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$.

(2) Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) \geq \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t} dt$. En déduire : $f(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$.
(3) Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[$, $0 < f(x) \leq \dfrac{1}{x}$. En déduire : $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
(4) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t} dt$ converge et que : $\forall x \in]0, +\infty[$, $\left| f(x) - \dfrac{1}{x} \right| \leq \dfrac{1}{x^2} \displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t} dt$.
(5) En déduire que : $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

Partie II : une autre expression intégrale de f

A - Dérivabilité et expression de la dérivée de f sous forme d'une intégrale

(1) Soit $(x, h) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}^*$ tel que $h > -\dfrac{x}{2}$.
(a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt$ converge.

(b) Etablir que, pour tout $t \in [0,+\infty[$, on a : $\left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right| \leq \frac{2|h|}{x^3}$.

(c) En déduire que : $\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt\right| \leq \frac{2|h|}{x^3}$.

(2) En déduire que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que : $\forall x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = -\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt$.

(3) Montrer que, pour tout $x \in]0,+\infty[$ et tout $(\varepsilon, A) \in]0,1] \times [1,+\infty[$, on a :

$$\int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt = -\frac{e^{-A}}{x+A}+\frac{e^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon}-\int_\varepsilon^A\frac{e^{-t}}{x+t}dt.$$

(4) En déduire que : $\forall x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = -\frac{1}{x}+f(x)$.

(5) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et que : $\forall x \in]0,+\infty[$, $f''(x) = \frac{1}{x^2}+f'(x)$.

B - Intervention d'une fonction auxiliaire g

On note $g :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $x \in]0,+\infty[$ par : $g(x) = e^{-x}f(x)$.

(1) Montrer que g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que : $\forall x \in]0,+\infty[$, $g'(x) = -\frac{e^{-x}}{x}$.

(2) Montrer que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, l'intégrale $\int_x^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}du$ converge et que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$g(x) = \int_x^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}du, \quad \text{puis que :} \quad f(x) = e^x\int_x^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}du.$$

(3) Montrer que : $\int_x^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}du \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$.

(4) Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 1} n^2\int_n^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}du$.