Lycée Clemenceau **Jeudi 7 novembre 2024**
ECG 2 **Durée : 4 heures**

Corrigé du devoir Surveillé de Mathématiques $n^o 2$

Corrigé de l'exercice 1. Etant donnés deux réels a, b, on considère les suites $(u_k)_{k\geq 0}$ et $(v_k)_{k\geq 0}$ telles que $u_0 = a$, $v_0 = b$ et telles que, pour tout entier $k \geq 0$, on ait $u_{k+1} = 1 + u_k + v_k$ et $v_{k+1} = 2 - 3u_k + 4u_k v_k$. Complétons la fonction en Python suivante qui, étant donnés des réels a, b et un entier $n \geq 0$, calcule u_n et v_n. Pour ce faire, on procède comme suit :

```
def suite(n,a,b):
    u=a
    v=b
    if n==0:
        return a,b
    else:
        for k in range(1,n+1):
            w=u
            u=1+u+v
            v=2-(3*w)+(4*w*u)
        return u,v
```

Corrigé de l'exercice 2. Ecrivons une fonction en Python qui, étant donné un entier $n \geq 1$, calcule le réel $S = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{kl}$. Pour ce faire, on va utiliser deux boucles `for` comme suit :

```
def doublesomme(n):
    s=0
    for k in range(1,n+1):
        for l in range(1,k+1):
            s=s+(1/(k*l))
    return s
```

Corrigé de l'exercice 3. On admet que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ converge et que sa somme est égale à $\dfrac{\pi}{4}$.

(1) Ecrivons une fonction en Python qui, étant donné un entier $n \geq 0$, calcule et affiche la somme :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Pour ce faire, on va utiliser une boucle `for` comme suit :

```
def somme(n):
    s=0
    for k in range(0,n+1):
        s=s+(((-1)**k)/(2*k+1))
    return s
```

(2) Déterminons une fonction en Python qui, étant donné un réel $\varepsilon > 0$, calcule et affiche le plus petit entier $n \geq 0$ tel que :

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \frac{\pi}{4} \right| \leq \varepsilon.$$

Pour ce faire, on va utiliser une boucle `for` comme suit :

```
import numpy as np

def entier(e):
    s=1
    n=0
    while np.abs(s-(np.pi/4)):
        n=n+1
        s=s+(((-1)**n)/(2*n+1))
    return n
```

Corrigé de l'exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans cet exercice, on se propose de déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[x]$ vérifiant l'équation $(\mathcal{E}_n) : \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) + P(x+1) = 2x^n$.

(1) Soit Φ l'application qui, à tout élément Q de $\mathbb{R}[x]$, associie le polynôme $\Phi(Q) : x \longmapsto Q(x) + Q(x+1)$.

(a) Etablissons que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[x]$. Comme Φ envoie tout polynôme de $\mathbb{R}[x]$ sur un polynôme de $\mathbb{R}[x]$, Φ est une application de $\mathbb{R}[x]$ dans $\mathbb{R}[x]$. Reste donc à montrer que Φ est linéaire. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et soient $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[x]$. Alors, on obtient par définition de Φ que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\Phi(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(x) &= (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(x) + (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(x+1) \\
&= \lambda_1 P_1(X) + \lambda_2 P_2(x) + \lambda_1 P_1(X+1) + \lambda_2 P_2(x+1) \\
&= \lambda_1 \left[P_1(x) + P_1(x+1)\right] + \lambda_2 \left[P_2(x) + P_2(x+1)\right] \\
&= \lambda_1 \Phi(P_1)(x) + \lambda_2 \Phi(P_2)(x),
\end{aligned}$$

d'où il s'ensuit que $\Phi(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = \lambda_1 \Phi(P_1) + \lambda_2 \Phi(P_2)$, et donc Φ est linéaire. Par conséquent :

$$\boxed{\Phi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}[x].}$$

(b) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on désigne par Φ_p la restriction de Φ à $\mathbb{R}_p[x]$, c'est-à-dire l'application définie pour tout $P \in \mathbb{R}_p[x]$ par $\Phi_p(P) = \Phi(P)$.

(i) Montrons que Φ_p est un endomorphisme de $\mathbb{R}_p[x]$. Soit P un élément de $\mathbb{R}_p[x]$. Alors P est un polynôme de $\mathbb{R}[x]$, de degré $\leq p$. D'après les propriétés du degré (notamment vis-à-vis de la composition des polynômes), on voit que :

$$\deg(x \longmapsto P(x+1)) = \deg(P) \times \deg(x \longmapsto x+1) \leq p \times 1 = p.$$

De plus, d'après les propriétés du degré (concernant la somme des polynômes), on a :

$$\deg(x \longmapsto P(x) + P(x+1)) \leq \max\{\deg(P), \deg(x \longmapsto P(x+1))\} \leq \max\{p, p\} = p.$$

Mais comme $\Phi_p(P)(x) = \Phi(P)(x) = P(x) + P(x+1)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_p[x]$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, il s'ensuit que Φ_p envoie tout élément de $\mathbb{R}_p[x]$ sur un élément de $\mathbb{R}_p[x]$, et donc Φ_p est une application de $\mathbb{R}_p[x]$ dans $\mathbb{R}_p[x]$. Reste donc à montrer que Φ_p est linéaire. Pour ce faire, on peut simplement dire que la restriction d'une application linéaire est linéaire, ou procéder comme suit. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et soient $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_p[x]$. Alors, on a par définition de Φ_p que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\Phi_p(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(x) &= (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(x) + (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(x+1) \\
&= \lambda_1 P_1(x) + \lambda_2 P_2(x) + \lambda_1 P_1(x+1) + \lambda_2 P_2(x+1) \\
&= \lambda_1 \left[P_1(x) + P_1(x+1)\right] + \lambda_2 \left[P_2(x) + P_2(x+1)\right] \\
&= \lambda_1 \Phi_p(P_1)(x) + \lambda_2 \Phi_p(P_2)(x),
\end{aligned}$$

d'où il s'ensuit que $\Phi_p(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = \lambda_1 \Phi_p(P_1) + \lambda_2 \Phi_p(P_2)$, et donc Φ_p est linéaire. Par conséquent :

$$\boxed{\Phi_p \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_p[x].}$$

(ii) Etablissons que la matrice A de Φ_p dans la base canonique $\mathcal{B}_p = (x \longmapsto 1, x \longmapsto x, ..., x \longmapsto x^p)$ de $\mathbb{R}_p[x]$ est triangulaire supérieure, et donnons ses coefficients diagonaux. D'après la formule du binôme, on trouve que, pour tout $k \in \{0, ..., p\}$:

$$\Phi_p(x^k) = x^k + (x+1)^k = x^k + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^i (1)^{k-i} = x^k + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^i,$$

ce que l'on peut réécrire sous la forme (vu que $\binom{k}{k} = 1$) :

$$\begin{aligned}\Phi_p(x^k) &= \binom{k}{0}1 + \binom{k}{1}x + ... + \binom{k}{k-1}x^{k-1} + \left[1 + \binom{k}{k}\right] x^k \\ &= \binom{k}{0}1 + \binom{k}{1}x + ... + \binom{k}{k-1}x^{k-1} + 2x^k\end{aligned}$$

Dès lors, il s'ensuit que la matrice de Φ_p dans la base canonique de $\mathbb{R}_p[x]$ est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & \binom{p}{0} \\ 0 & 2 & 2 & \cdots & \binom{p}{1} \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & \binom{p}{2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{A \text{ est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont tous égaux à 2.}}$$

(iii) Montrons que Φ_p est un isomorphisme de $\mathbb{R}_p[x]$ dans $\mathbb{R}_p[x]$. D'après la question précédente, on sait que la matrice A de Φ_p dans la base canonique $\mathcal{B}_p$ de $\mathbb{R}_p[x]$ est triangulaire supérieure, et que tous ses coefficients diagonaux sont égaux à 2. En particulier, comme A est triangulaire supérieure et que tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, la matrice A est inversible, ce qui entraine que :

$$\boxed{\text{l'endomorphisme } \Phi_p \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{R}_p[x] \text{ dans } \mathbb{R}_p[x].}$$

(c) Prouvons que Φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}[x]$ dans $\mathbb{R}[x]$. D'après la question $(1)(a)$, on sait que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[x]$. Reste donc à montrer que Φ est bijectif. Pour ce faire, on va commencer par montrer que Φ est injectif. Soit P un élément de $\ker(\Phi)$. Alors il existe un entier $p \geq 0$ (supérieur ou égal au degré de P) tel que $P \in \mathbb{R}_p[x]$, et donc :

$$\Phi(P) = \Phi_p(P) = 0_{\mathbb{R}_p[x]}.$$

Comme Φ_p est un isomorphisme de $\mathbb{R}_p[x]$ dans $\mathbb{R}_p[x]$, il s'ensuit que $\ker(\Phi_p) = \{0_{\mathbb{R}_p[x]}\}$, et donc P est le polynôme nul. Mais comme ceci est vrai pour tout $P \in \ker(\Phi)$, on en déduit que :

$$\boxed{\ker(\Phi) = \{0_{\mathbb{R}[x]}\} \text{ et } \Phi \text{ est injectif.}}$$

A présent, montrons que Φ est surjectif. Soit Q un élément de $\mathbb{R}[x]$. Alors il existe un entier $p \geq 0$ (supérieur ou égal au degré de Q) tel que $Q \in \mathbb{R}_p[x]$. Comme Φ_p est un isomorphisme de $\mathbb{R}_p[x]$ dans $\mathbb{R}_p[x]$, il s'ensuit que Φ_p est surjectif, et donc il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_p[x]$ tel que :

$$\Phi(P) = \Phi_p(P) = Q.$$

Mais comme ceci est vrai pour tout $Q \in \mathbb{R}[x]$, on en déduit que :

$$\boxed{\mathfrak{Im}(\Phi) = \mathbb{R}[x] \text{ et } \Phi \text{ est surjectif.}}$$

En conclusion, on vient de montrer que :

$$\boxed{\Phi \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{R}[x] \text{ dans } \mathbb{R}[x].}$$

(d) Montrons qu'il existe un unique polynôme $E_n \in \mathbb{R}[x]$ vérifiant l'équation $(\mathcal{E}_n)$. Par définition, on voit que l'équation $(\mathcal{E}_n)$ peut se réécrire sous la forme :

$$(\mathcal{E}_n) : \Phi(P) = (x \longmapsto 2x^n).$$

Comme Φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}[x]$, on sait que Φ est une bijection de $\mathbb{R}[x]$ dans lui-même, et donc le polynôme $x \longmapsto 2x^n$ admet un unique antécédent (noté E_n) par Φ. Mais comme les antécédents de $x \longmapsto 2x^n$ par Φ sont exactement les solutions de l'équation $(\mathcal{E}_n)$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{il existe un unique polynôme } E_n \in \mathbb{R}[x] \text{ vérifiant l'équation } (\mathcal{E}_n).}$$

(e) Précisons le degré de E_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$. Fixons un entier $n \in \mathbb{N}$. Si p désigne le degré de E_n, alors on sait qu'il existe des réels $a_0, ..., a_p$ avec $a_p \neq 0$ tels que :

$$E_n(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_p x^p.$$

D'après la formule du binôme, on trouve que :

$$\begin{aligned}
\Phi(E_n)(x) &= a_0 + ... + a_p x^p + a_0 + ... + a_p (x+1)^p \\
&= a_0 + ... + a_p x^p + a_0 + ... + a_p \left[1 + \binom{p}{1} x + ... + \binom{p}{p-1} x^{p-1} + x^p\right] \\
&= [a_0 + a_1 + ... + a_p] + \left[\binom{1}{1} a_1 + ... + \binom{p}{1} a_p\right] x + ... + 2a_p x^p,
\end{aligned}$$

et donc $\deg(\Phi(E_n)) = p$. Mais comme $\Phi(E_n)(x) = 2x^n$, il s'ensuit que $\deg(\Phi(E_n)) = n$, et donc $p = n$. Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\deg(E_n) = n.}$$

(2) Dans cette question, on pose $E_n : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} x^k$.

(a) Vérifions l'égalité suivante pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$E_n(x+1) + E_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \left[a_{n,j} + \sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} a_{n,k}\right] x^j.$$

En procédant comme à la question précédente, d'après la formule du binôme et les propriétés des sommes doubles, on trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\Phi(E_n)(x) &= E_n(x+1) + E_n(x) \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_{n,j} x^j + \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} (x+1)^k \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_{n,j} x^j + \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \left[\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j (1)^{k-j}\right] \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_{n,j} x^j + \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \left[\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j\right] \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_{n,j} x^j + \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} a_{n,k} \binom{k}{j} x^j \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_{n,j} x^j + \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} a_{n,k} \binom{k}{j} x^j \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_{n,j} x^j + \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=j}^{n} a_{n,k} \binom{k}{j}\right) x^j.
\end{aligned}$$

Par linéarité de la somme, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{E_n(x+1) + E_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \left[a_{n,j} + \sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} a_{n,k}\right] x^j.}$$

(b) Déterminons le système linéaire dont les $a_{n,k}$ sont les solutions, et précisons la valeur de $a_{n,n}$. D'après la question précédente et comme $\Phi(E_n)(x) = 2x^n$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{j=0}^{n} \left[a_{n,j} + \sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} a_{n,k}\right] x^j = 2x^n.$$

Par unicité de l'écriture réduite d'un polynôme, on obtient que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall j \in \{0, ..., n-1\}, \;\; a_{n,j} + \sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} a_{n,k} = 0 \quad \text{et} \quad a_{n,n} + \sum_{k=n}^{n} \binom{k}{n} a_{n,k} = 2a_{n,n} = 2.$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on voit que les $a_{n,k}$ sont solutions du système linéaire :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{ccccccccccc} 2a_{n,0} & + & \binom{1}{0}a_{n,1} & + & \binom{2}{0}a_{n,2} & + & \dots & + & \binom{n}{0}a_{n,n} & = & 0 \\ & & 2a_{n,1} & + & \binom{2}{1}a_{n,2} & + & \dots & + & \binom{n}{1}a_{n,n} & = & 0 \\ & & & & \ddots & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & & & 2a_{n,n} & = & 2 \end{array}\right.}.$$

En particulier, on voit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{a_{n,n} = 1.}$$

(c) Déterminons les polynômes E_0, E_1, E_2. D'après les questions précédentes, on sait que E_0 est de degré 0, et donc il est constant. Comme de plus $a_{0,0} = 1$, il s'ensuit que :

$$\boxed{E_0 : x \longmapsto 1.}$$

Toujours d'après les questions précédentes, on sait que E_1 est de degré 1, de la forme $E_1 : x \longmapsto a_{1,0} + a_{1,1}x$. Comme de plus $2a_{1,0} + a_{1,1} = 0$ et que $a_{1,1} = 1$, il s'ensuit que $a_{1,0} = -\frac{1}{2}$, et donc :

$$\boxed{E_1 : x \longmapsto x - \frac{1}{2}.}$$

Comme précédemment, on sait que E_2 est de degré 2, de la forme $E_2 : x \longmapsto a_{2,0} + a_{2,1}x + a_{2,2}x^2$. Comme de plus $(a_{2,0}, a_{2,1}, a_{2,2})$ est solution du système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2a_{2,0} & + & a_{2,1} & + & a_{2,2} & = & 0 \\ & & 2a_{2,1} & + & 2a_{2,2} & = & 0 \\ & & & & 2a_{2,2} & = & 2 \end{array}\right.,$$

il s'ensuit que $a_{2,2} = 1$, $a_{2,1} = -1$, $a_{2,0} = 0$, et donc :

$$\boxed{E_2 : x \longmapsto x^2 - x.}$$

(d) Démontrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $E_n'(x) = nE_{n-1}(x)$. Fixons un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition, on sait que E_n est l'unique solution de l'équation :

$$(\mathcal{E}_n) : \forall x \in \mathbb{R}, \; E_n(x) + E_n(x+1) = 2x^n.$$

D'après les propriétés de la dérivation, on trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$E_n'(x) + E_n'(x+1) = 2nx^{n-1}.$$

Posons $F_{n-1} = \frac{E_n'}{n}$. Alors on obtient en divisant la relation ci-dessus par n que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F_{n-1}(x) + F_{n-1}(x+1) = \frac{E_n'(x) + E_n'(x+1)}{n} = 2x^{n-1}.$$

En particulier, le polynôme F_{n-1} est solution de l'équation $(\mathcal{E}_{n-1})$. Mais comme cette équation admet E_{n-1} pour unique solution d'après les questions précédentes, il s'ensuit que :

$$F_{n-1} = \frac{E_n'}{n} = E_{n-1}.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{E_n'(x) = nE_{n-1}(x).}$$

(e) Déterminons l'expression de la dérivée k-ème $E_n^{(k)}$ de E_n. Pour ce faire, fixons un entier $n \in \mathbb{N}^*$, et montrons par une récurrence finie la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout $k \in \{0, ..., n\}$ par :

$$\mathcal{P}(k) : \text{"}\forall x_i n\mathbb{R},\ E_n^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} E_{n-k}(x).\text{"}$$

Tout d'abord, on voit que $\mathcal{P}(0)$ est vraie, car on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$E_n^{(0)}(x) = E_n(x) \quad \text{et} \quad \frac{n!}{(n-0)!} E_{n-0}(x) = \frac{n!}{n!} E_n(x) = E_n(x).$$

A présent, supposons la propriété $\mathcal{P}(k)$ vraie, avec $0 \leq k < n$, et montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ l'est aussi. Par hypothèse de récurrence, on sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$E_n^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} E_{n-k}(x).$$

Par dérivation et d'après la question précédente, on trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
E_n^{(k+1)}(x) &= \left(E_n^{(k)}\right)'(x) \\
&= \left(\frac{n!}{(n-k)!} E_{n-k}(x)\right)' \\
&= \frac{n!}{(n-k)!}(n-k) E_{n-k-1}(x) \\
&= \frac{n!}{(n-k-1)!(n-k)}(n-k) E_{n-k-1}(x) \\
&= \frac{n!}{(n-k-1)!} E_{n-k-1}(x),
\end{aligned}$$

et donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout ordre $k \in \{0, ..., n\}$. En particulier, on a pour tout $k \in \{0, ..., n\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$E_n^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} E_{n-k}(x).$$

De plus, comme E_n est de degré n d'après les questions précédentes, on voit que $E_n^{(k)} = 0_{\mathbb{R}_n[x]}$ si $k > n$. Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{E_n^{(k)}(x) = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!} E_{n-k}(x) & \text{si} \quad k \in \{0, ..., n\} \\ 0 & \text{si} \quad k > n \end{cases}.}$$

(f) Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $E_n(x) = (-1)^n E_n(1-x)$. Fixons un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition, on sait que E_n est l'unique solution de l'équation :

$$(\mathcal{E}_n) : \text{"}\forall x \in \mathbb{R},\ E_n(x) + E_n(x+1) = 2x^n\text{"}.$$

Posons alors $G_n(x) = (-1)^n E_n(1-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par des calculs simples, on trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
G_n(x) + G_n(x+1) &= (-1)^n E_n(1-x) + (-1)^n E_n(1-(x+1)) \\
&= (-1)^n E_n(1-x) + (-1)^n E_n(-x) \\
&= (-1)^n \left[E_n(-x) + E_n(-x+1)\right] \\
&= (-1)^n 2(-x)^n \\
&= (-1)^n 2(-1)^n x^n \\
&= 2x^n.
\end{aligned}$$

En particulier, le polynôme G_n est solution de l'équation $(\mathcal{E}_n)$. Mais comme cette équation admet E_n pour unique solution d'après les questions précédentes, il s'ensuit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$G_n(x) = (-1)^n E_n(1-x) = E_n(x).$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{E_n(x) = (-1)^n E_n(1-x).}$$

(g) Déterminons, pour tout entier pair $n > 0$, les valeurs de $E_n(0)$ et $E_n(1)$. D'après la question précédente, on sait que $E_n(x) = (-1)^n E_n(1-x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier, si n est pair, on voit que $(-1)^n = 1$, et donc $E_n(x) = E_n(1-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En remplaçant x par 0, on trouve alors que :

$$E_n(0) = E_n(1-0) = E_n(1).$$

Comme de plus $E_n(x) + E_n(x+1) = 2x^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient en remplaçant x par 0 que :

$$E_n(0) + E_n(0+1) = E_n(0) + E_n(1) = 2 \times 0^n = 0.$$

Mais comme $E_n(0) = E_n(1)$ et $E_n(0) + E_n(1) = 0$, on en déduit que, pour tout entier pair $n > 0$:

$$\boxed{E_n(0) = E_n(1) = 0.}$$

(h) Déterminons, pour tout entier impair n, la valeur de $E_n(\frac{1}{2})$. D'après la question précédente, on sait que $E_n(x) = (-1)^n E_n(1-x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier, si n est impair, on voit que $(-1)^n = -1$, et donc $E_n(x) = -E_n(1-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En remplaçant x par $\frac{1}{2}$, on trouve alors que :

$$E_n\left(\frac{1}{2}\right) = -E_n\left(1-\frac{1}{2}\right) = -E_n\left(\frac{1}{2}\right).$$

Comme $E_n(\frac{1}{2}) = -E_n(\frac{1}{2})$, on en déduit que $2E_n(\frac{1}{2}) = 0$, et donc pour tout entier impair n :

$$\boxed{E_n\left(\frac{1}{2}\right) = 0.}$$

(i) Déterminons les polynômes E_3 et E_4. Pour ce faire, partant des questions précédentes, on sait que $E_n'(x) = nE_{n-1}(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$. Dès lors, en remplaçant n par 3, on trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$E_3'(x) = 3E_{3-1}(x) = 3E_2(x) = 3(x^2 - x) = 3x^2 - 3x.$$

Par intégration, on voit qu'il existe un réel c tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$E_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + c.$$

Comme $E_n\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ pour tout entier impair n d'après la question précédente, il s'ensuit que :

$$E_3\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + c = \frac{1}{8} - \frac{3}{8} + c = -\frac{1}{4} + c = 0.$$

et donc $c = \frac{1}{4}$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{E_3 : x \longmapsto x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}.}$$

Comme précédemment, on sait que $E_n'(x) = nE_{n-1}(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$. Dès lors, en remplaçant n par 4, on trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$E_4'(x) = 4E_{4-1}(x) = 4E_3(x) = 4\left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}\right) = 4x^3 - 6x^2 + 1.$$

Par intégration, on voit qu'il existe un réel d tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$E_4(x) = x^4 - 2x^3 + x + d.$$

Comme $E_n(0) = 0$ pour tout entier pair $n > 0$ d'après les questions précédentes, il s'ensuit que $d = 0$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{E_4 : x \longmapsto x^4 - 2x^3 + x.}$$

Corrigé de l'exercice 5. Soit A un élément de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et soit I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Pour tout polynôme $P : x \longmapsto a_0 + a_1x + ... + a_mx^m$ de $\mathbb{R}[x]$, on pose $P(A) = a_0I + a_1A + ... + a_mA^m$. Par la suite, on admet que, pour tous polynômes $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ et pour tous réels λ, μ, on a $(\lambda P + \mu Q)(A) = \lambda P(A) + \mu Q(A)$ et $(PQ)(A) = P(A)Q(A)$. Dans cet exercice, on se propose de déterminer explicitement le terme général de la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1$ et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n$. Pour ce faire, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}.$$

(1) Ecrivons une fonction en Python qui, étant donné un entier $n \geq 0$, calcule et affiche u_n. Pour ce faire, on va utiliser une fonction récursive comme suit :

```
def suiteu(n):
    if n==0:
        return 0
    elif n==1:
        return 1
    elif n==2:
        return 1
    else:
        return 4*suiteu(n-1)-5*suiteu(n-2)+2*suiteu(n-3)
```

(2) (a) Ecrivons la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, indépendante de n, telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$. D'après la relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n), on trouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} X_n.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

(b) Vérifions que $(A - I)^2(A - 2I) = 0$. Par des calculs simples, on trouve que :

$$A - I = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

En particulier, ceci entraine que :

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dès lors, il s'ensuit que :

$$(A - I)^2(A - 2I) = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{(A - I)^2(A - 2I) = 0.}$$

(3) On considère le polynôme P de $\mathbb{R}[x]$ défini par : $P : x \longmapsto (x - 1)^2(x - 2)$.

(a) Justifions l'existence et l'unicité d'un couple $(Q_n, R_n) \in \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}_2[x]$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x^n = P(x)Q_n(x) + R_n(x).$$

Pour ce faire, fixons un entier $n \in \mathbb{N}$. Comme le polynôme P est de degré 3, le théorème sur la division euclidienne entraine l'existence d'un unique couple $(Q_n, R_n) \in \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x]$, avec $\deg(R_n) < 3$ tel que $x^n = P(x)Q_n(x) + R_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Mais comme $\deg(R_n) < 3$, on voit que $\deg(R_n) \leq 2$, et donc R_n appartient à $\mathbb{R}_2[x]$. Par conséquent :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \ \exists!(Q_n, R_n) \in \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}_2[x],\ \ \forall x \in \mathbb{R},\ \ x^n = P(x)Q_n(x) + R_n(x).}$$

(b) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists (a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $R_n(x) = a_n + b_n(x-1) + c_n(x-1)^2$. Pour ce faire, fixons un entier $n \in \mathbb{N}$. Comme la famille $(x \longmapsto 1, x \longmapsto x-1, x \longmapsto (x-1)^2)$ est formée de polynômes de degrés échelonnés, elle est libre. De plus, comme cette famille compte trois éléments appartenant à $\mathbb{R}_2[x]$ et que $\dim \mathbb{R}_2[x] = 3$, il s'ensuit que cette famille est une base de $\mathbb{R}_2[x]$. Mais comme R_n appartient à $\mathbb{R}_2[x]$ d'après la question précédente, ce polynôme doit s'exprimer comme combinaison linéaire des éléments de cette base. Par conséquent :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \;\; \exists (a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3, \;\; \forall x \in \mathbb{R}, \;\; R_n(x) = a_n + b_n(x-1) + c_n(x-1)^2.}$$

(c) Etablissons par récurrence la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) : \text{"}a_n = 1, \;\; b_n = n, \;\; c_n = 2^n - n - 1\text{"}.$$

Tout d'abord, on remarque que $\mathcal{P}(0)$ est vraie. En effet, par définition de la division euclidienne, on voit que $x^0 = 1 = 0 \times P(x) + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et donc $R_0(x) = 1 = a_0 1 + b_0(x-1) + c_0(x-1)^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui entraine que $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $c_0 = 0$. Dès lors, il s'ensuit que :

$$a_0 = 1, \quad b_0 = 0, \quad c_0 = 0 = 2^0 - 0 - 1.$$

A présent, supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi. D'après la question (2)(a), il existe un unique couple $(Q_n, R_n) \in \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}_2[x]$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x^n = P(x)Q_n(x) + R_n(x).$$

Par multiplication par x, on trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$^{n+1} = xP(x)Q_n(x) + xR_n(x).$$

D'après la question précédente et par définition de P, on obtient que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
x^{n+1} &= xP(x)Q_n(x) + x\left[a_n + b_n(x-1) + c_n(x-1)^2\right] \\
&= xP(x)Q_n(x) + a_n x + b_n(x-1)x + c_n(x-1)^2 x \\
&= xP(x)Q_n(x) + a_n(x-1+1) + b_n(x-1)(x-1+1) + c_n(x-1)^2(x-2+2) \\
&= xP(x)Q_n(x) + a_n(x-1) + a_n + b_n(x-1)^2 + b_n(x-1) + c_n(x-1)^2(x-2) + 2c_n(x-1)^2 \\
&= xP(x)Q_n(x) + a_n + (a_n+b_n)(x-1) + (b_n+2c_n)(x-1)^2 + c_n(x-1)^2(x-2) \\
&= xP(x)Q_n(x) + a_n + (a_n+b_n)(x-1) + (b_n+2c_n)(x-1)^2 + c_n P(x) \\
&= P(x)\left[xQ_n(x) + c_n\right] + a_n + (a_n+b_n)(x-1) + (b_n+2c_n)(x-1)^2.
\end{aligned}$$

Comme $x^{n+1} = P(x)Q_{n+1}(x) + R_{n+1}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ceci entraine par unicité de la division euclidienne que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$R_{n+1}(x) = a_n + (a_n+b_n)(x-1) + (b_n+2c_n)(x-1)^2.$$

Comme $(x \longmapsto 1, x \longmapsto x-1, x \longmapsto (x-1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$, on a par définition de $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ que :

$$a_{n+1} = a_n, \quad b_{n+1} = a_n + b_n, \quad c_{n+1} = b_n + 2c_n.$$

Comme $a_n = 1$, $b_n = n$, $c_n = 2^n - n - 1$ par hypothèse de récurrence, on voit que $a_{n+1} = 1$, $b_{n+1} = n+1$ et de plus :

$$c_{n+1} = n + 2(2^n - n - 1) = 2^{n+1} - 2n + n - 2 = 2^{n+1} - (n+1) - 1,$$

d'où il s'ensuit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout ordre $n \in \mathbb{N}$, et donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \;\; a_n = 1, \;\; b_n = n, \;\; c_n = 2^n - n - 1.}$$

(4) (a) Ecrivons la matrice A^n comme combinaison linéaire des matrices $I, A - I, (A-I)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente et par définition de R_n, a_n, b_n, c_n, on sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$R_n(x) = 1 + n(x-1) + (2^n - n - 1)(x-1)^2.$$

Comme $x^n = P(x)Q_n(x) + R_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que $P(A) = 0$ d'après la question $(1)(b)$, on obtient que :

$$\begin{aligned} A^n &= P(A)Q_n(A) + R_n(A) \\ &= 0 \times Q_n(A) + R_n(A) \\ &= 0 \times Q_n(A) + I + n(A-I) + (2^n - n - 1)(A-I)^2 \\ &= I + n(A-I) + (2^n - n - 1)(A-I)^2. \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{A^n = I + n(A-I) + (2^n - n - 1)(A-I)^2.}$$

(b) Donnons la troisième ligne de la matrice A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, on sait que $A^n = I + n(A-I) + (2^n - n - 1)(A-I)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + (2^n - n - 1) \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Après calculs, on voit que la troisième ligne L_n de la matrice A^n est donnée pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\boxed{L_n = \begin{pmatrix} 2^n - n - 1 & -2^{n+1} + 3n + 2 & 2^n - 2n \end{pmatrix}.}$$

(5) (a) Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) : "X_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}".$$

Tout d'abord, on remarque que $\mathcal{P}(0)$ est vraie. En effet, on sait par définition de (u_n) que $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, ce qui entraine par définition de X_0 que :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A présent, supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi. Comme $X_{n+1} = AX_n$ d'après la question $(1)(a)$, on a par hypothèse de récurrence que :

$$X_{n+1} = AX_n = AA^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A^{n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

d'où il s'ensuit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout ordre $n \in \mathbb{N}$, et donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.}$$

(b) Déterminons l'expression de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après les questions $(3)(b)$ et $(4)(a)$, on trouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left[I + n(A-I) + (2^n - n - 1)(A-I)^2\right] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (*)$$

Par des calculs simples, on obtient que :

$$(A-I) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De la même manière, on trouve que :

$$(A-I)^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dès lors, il s'ensuit en reportant ces calculs dans l'égalité $(*)$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X_n = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + n\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} + (2^n - n - 1)\begin{pmatrix}-4\\-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2^{n+2}+2n+5\\-2^{n+1}+2n+3\\-2^n+2n+1\end{pmatrix}.$$

Mais comme u_n est la troisième composante de X_n, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{u_n = -2^n + 2n + 1.}$$

Corrigé du problème 1. Dans ce problème, on se propose d'étudier une fonction définie par une intégrale.

Partie I : étude d'une fonction f

(1) Montrons que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}dt$ converge. Pour tout $x \in]0,+\infty[$ et pour tout $t \geq 0$, on voit par des calculs simples que :

$$0 \leq \frac{e^{-t}}{x+t} \leq \frac{e^{-t}}{x}.$$

Comme l'intégrale exponentielle $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ converge d'après le cours, on obtient par linéarité que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x}dt$ converge aussi pour tout $x \in]0,+\infty[$. Dès lors, le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives entraine que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}dt \text{ converge.}}$$

On note $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $x \in]0,+\infty[$ par : $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}dt.$

(2) Montrons tout d'abord que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a : $f(x) \geq \int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}dt$. Par définition de f et d'après la relation de Chasles, on voit que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}dt = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t}dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}dt. \quad (*)$$

Comme $\frac{e^{-t}}{x+t} \geq 0$ pour tout $x \in]0,+\infty[$ et pour tout $t \geq 1$, on obtient par positivité de l'intégrale que :

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}dt \geq 0.$$

D'après la relation $(*)$, on trouve que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$f(x) \geq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t}dt. \quad (**)$$

Par ailleurs, comme la fonction $t \longmapsto e^{-t}$ est décroissante sur $[0,1]$, on voit que $e^{-t} \geq e^{-1}$ pour tout $t \in [0,1]$. Dès lors, on obtient que, pour tout $x \in]0,+\infty[$ et pour tout $t \in [0,1]$:

$$\frac{e^{-t}}{x+t} \geq \frac{e^{-1}}{x+t}.$$

Par croissance de l'intégrale, on trouve que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t}dt \geq \int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}dt. \quad (***)$$

En associant les inégalités $(**)$ et $(***)$, il s'ensuit que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$f(x) \geq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t}dt \geq \int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}dt.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\boxed{f(x) \geq \int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}dt.}$$

A présent, montrons que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0^+. Par des calculs simples et par linéarité de l'intégrale, on obtient que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}dt = e^{-1}\int_0^1 \frac{1}{x+t}dt = e^{-1}\left[\ln(x+t)\right]_0^1 = e^{-1}\left[\ln(x+1)-\ln(x)\right].$$

Comme $\ln(x+1)$ tend vers $\ln(1)=0$ quand x tend vers 0^+, et que $\ln(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers 0^+, il s'ensuit que $\ln(x+1)-\ln(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0^+, et donc :

$$\int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}dt \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty.$$

Mais comme $f(x) \geq \int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}dt$ pour tout $x \in]0,+\infty[$, on en déduit par comparaison que :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty.}$$

(3) Montrons tout d'abord que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a : $0 < f(x) \leq \frac{1}{x}$. Pour ce faire, on commence par remarquer que, pour tout $t \geq 0$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$0 < \frac{e^{-t}}{x+t} \leq \frac{e^{-t}}{x}.$$

Comme l'intégrale exponentielle $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ converge d'après le cours, on obtient par linéarité que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x}dt$ converge aussi pour tout $x \in]0,+\infty[$. Dès lors, comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}dt$ converge d'après la question (1), on obtient par croissance et stricte positivité de l'intégrale que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$0 < \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x}dt.$$

Par définition de f et par linéarité de l'intégrale, on trouve que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$0 < f(x) \leq \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-t}dt.$$

D'après le cours sur les intégrales exponentielles, on sait que $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$. Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\boxed{0 < f(x) \leq \frac{1}{x}.}$$

A présent, montrons que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. D'après ce qui précède, on sait que $0 < f(x) \leq \frac{1}{x}$ pour tout $x \in]0,+\infty[$. Mais comme $\frac{1}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, il s'ensuit par encadrement que :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

(4) Montrons tout d'abord que l'intégrale $\int_0^{+\infty} te^{-t}dt$ converge. D'après le cours, on sait que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ (correspondant à la fonction Γ) converge pour tout $x > 0$. En particulier, cette intégrale converge pour $x = 2$, ce qui entraine que :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} te^{-t}dt \text{ converge.}}$$

A présent, montrons que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$\left|f(x) - \frac{1}{x}\right| \leq \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} te^{-t}dt.$$

D'après les propriétés des intégrales exponentielles et par linéarité de l'intégrale, on trouve par des calculs simples que, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}
f(x) - \frac{1}{x} &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt - \frac{1}{x} \times 1 \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt - \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-t} dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x} dt \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-t}}{x+t} - \frac{e^{-t}}{x} \right) dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{x+t} - \frac{1}{x} \right) dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{x-(x+t)}{x(x+t)} \right) dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{-t}{x(x+t)} \right) dt \\
&= -\int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{x(x+t)} dt.
\end{aligned}$$

En passant aux valeurs absolues et sachant que $\frac{te^{-t}}{x(x+t)} \geq 0$ pour tout $t \geq 0$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$, il s'ensuit par positivité de l'intégrale que :

$$\left| f(x) - \frac{1}{x} \right| = \left| -\int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{x(x+t)} dt \right| = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{x(x+t)} dt. \quad (*)$$

Comme $x(x+t) \geq x$ pour tout $t \geq 0$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$, on obtient que, pour tout $t \geq 0$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$\frac{te^{-t}}{x(x+t)} \leq \frac{te^{-t}}{x^2}.$$

Par croissance de l'intégrale, on trouve que, pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{x(x+t)} dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{x^2} dt.$$

Par linéarité de l'intégrale, il s'ensuit que, pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{x(x+t)} dt \leq \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} te^{-t} dt. \quad (**)$$

En réunissant les relations $(*)$ et $(**)$, on en déduit que, pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$\boxed{\left| f(x) - \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} te^{-t} dt.}$$

(5) Montrons que : $f(x) \sim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}$. D'après la question (4), on sait que, pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$\left| f(x) - \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} te^{-t} dt.$$

En divisant cette inégalité par $\frac{1}{x}$ (lequel est positif car $x > 0$), on obtient que, pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$0 \leq \left| \frac{f(x)}{\frac{1}{x}} - 1 \right| \leq \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} te^{-t} dt.$$

Comme $\frac{1}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, il s'ensuit par encadrement que :

$$\left| \frac{f(x)}{\frac{1}{x}} - 1 \right| \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En particulier, cela signifie que :

$$\frac{f(x)}{\frac{1}{x}} - 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui se retraduit sous la forme suivante :

$$\frac{f(x)}{\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}.}$$

Partie II : une autre expression intégrale de f

A - Dérivablité et expression de la dérivée de f sous forme d'une intégrale

(1) Soit $(x,h) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}^*$ tel que $h > -\dfrac{x}{2}$.

(a) Montrons que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt$ converge. Pour tout $x \in]0,+\infty[$ et pour tout $t \geq 0$, on voit par des calculs simples que :

$$0 \leq \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} \leq \frac{e^{-t}}{x^2}.$$

Comme l'intégrale exponentielle $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ converge d'après le cours, on obtient par linéarité que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x^2}dt$ converge aussi pour tout $x \in]0,+\infty[$. Dès lors, le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives entraine que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt \text{ converge.}}$$

(b) Etablissons que, pour tout $t \in [0,+\infty[$, on a :

$$\left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t}\right) + \frac{1}{(x+t)^2}\right| \leq \frac{2|h|}{x^3}.$$

Par des calculs simples, on obtient que, pour tout $t \in [0,+\infty[$:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t}\right) + \frac{1}{(x+t)^2}\right| &= \left|\frac{1}{h}\left(\frac{x+t-(x+t+h)}{(x+h+t)(x+t)}\right) + \frac{1}{(x+t)^2}\right| \\
&= \left|\frac{1}{h}\left(\frac{-h}{(x+h+t)(x+t)}\right) + \frac{1}{(x+t)^2}\right| \\
&= \left|-\frac{1}{(x+h+t)(x+t)} + \frac{1}{(x+t)^2}\right| \\
&= \left|\frac{-(x+t)+(x+t+h)}{(x+h+t)(x+t)^2}\right| \\
&= \left|\frac{h}{(x+h+t)(x+t)^2}\right| \\
&= \frac{|h|}{|x+h+t|(x+t)^2}.
\end{aligned}$$

Comme $x > 0$, $t \geq 0$ et $h > -\frac{x}{2}$, on voit que $x+t+h > \frac{x}{2} \geq 0$ et $x+t \geq x \geq 0$, et donc $|x+t+h| > \frac{x}{2}$ et $(x+t)^2 \geq x^2$. Dès lors, on obtient avec la relation ci-dessus que, pour tout $t \in [0,+\infty[$:

$$\left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t}\right) + \frac{1}{(x+t)^2}\right| \leq \frac{|h|}{\frac{x}{2}\times x^2} = \frac{2|h|}{x^3}.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $t \in [0,+\infty[$:

$$\boxed{\left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t}\right) + \frac{1}{(x+t)^2}\right| \leq \frac{2|h|}{x^3}.}$$

(c) Montrons l'inégalité suivante :

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt\right|\leq\frac{2|h|}{x^3}.$$

D'après la question précédente, on sait que, pour tout $t\in[0,+\infty[$:

$$\left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right|\leq\frac{2|h|}{x^3}.$$

On peut alors remarquer que cette inégalité signifie que, pour tout $t\in[0,+\infty[$:

$$-\frac{2|h|}{x^3}\leq\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\leq\frac{2|h|}{x^3}.$$

En multipliant cet encadrement par e^{-t}, on obtient que, pour tout $t\in[0,+\infty[$:

$$-\frac{2|h|e^{-t}}{x^3}\leq\frac{1}{h}\left(\frac{e^{-t}}{x+h+t}-\frac{e^{-t}}{x+t}\right)+\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\leq\frac{2|h|e^{-t}}{x^3}.$$

Comme $x>0$ et $x+h>\frac{x}{2}>0$, on voit que les intégrales $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+h+t}dt$, $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+t}dt$ et $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt$ convergent toutes les trois d'après les questions précédentes. Comme de plus l'intégrale $\int_0^{+\infty}e^{-t}dt$ converge aussi d'après le cours, il s'ensuit par linéarité et croissance de l'intégrale que :

$$\int_0^{+\infty}-\frac{2|h|e^{-t}}{x^3}dt\leq\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{h}\left(\frac{e^{-t}}{x+h+t}-\frac{e^{-t}}{x+t}\right)+\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\right]dt\leq\int_0^{+\infty}\frac{2|h|e^{-t}}{x^3}dt.$$

Dès lors, on obtient toujours par linéarité de l'intégrale que :

$$-\frac{2|h|}{x^3}\int_0^{+\infty}e^{-t}dt\leq\frac{1}{h}\left(\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+h+t}dt-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+t}dt\right)+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt\leq\frac{2|h|}{x^3}\int_0^{+\infty}e^{-t}dt.$$

Par définition de la fonction f, on trouve que :

$$-\frac{2|h|}{x^3}\int_0^{+\infty}e^{-t}dt\leq\frac{1}{h}\left(f(x+h)-f(x)\right)+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt\leq\frac{2|h|}{x^3}\int_0^{+\infty}e^{-t}dt.$$

Comme $\int_0^{+\infty}e^{-t}dt=1$ d'après le cours, il s'ensuit que :

$$-\frac{2|h|}{x^3}\leq\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt\leq\frac{2|h|}{x^3}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt\right|\leq\frac{2|h|}{x^3}.}$$

(2) Montrons que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que, pour tout $x\in]0,+\infty[$, on a :

$$f'(x)=-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt.$$

D'après la question précédente, on sait que, pour tout $(x,h)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}^*$ tel que $h>-\dfrac{x}{2}$:

$$0\leq\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt\right|\leq\frac{2|h|}{x^3}.$$

D'après le théorème d'encadrement, on obtient que, pour tout $x\in]0,+\infty[$:

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt\right|\underset{h\to0}{\longrightarrow}0.$$

En d'autres termes, cela signifie que, pour tout $x\in]0,+\infty[$:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt\underset{h\to0}{\longrightarrow}0.$$

Dès lors, il s'ensuit que, pour tout $x\in]0,+\infty[$:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\underset{h\to0}{\longrightarrow}-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{f \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[\text{ et : } \forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt.}$$

(3) Montrons que, pour tout $x \in]0,+\infty[$ et tout $(\varepsilon, A) \in]0,1] \times [1,+\infty[$, on a :

$$\int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt = -\frac{e^{-A}}{x+A} + \frac{e^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon} - \int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{x+t}dt.$$

Pour ce faire, posons $u(t) = -e^{-t}$ et $v(t) = \frac{1}{x+t}$ pour tout $t \in [\varepsilon, A]$. Alors les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon, A]$, et de plus $u'(t) = e^{-t}$ et $v'(t) = -\frac{1}{(x+t)^2}$ pour tout $t \in [\varepsilon, A]$. Dès lors, par intégration par parties, on obtient que :

$$\begin{aligned}
\int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt &= \int_\varepsilon^A u(t)v'(t)dt \\
&= [u(t)v(t)]_\varepsilon^A - \int_\varepsilon^A u'(t)v(t)dt \\
&= \left[-\frac{e^{-t}}{x+t}\right]_\varepsilon^A - \int_\varepsilon^A -\frac{e^{-t}}{x+t}dt \\
&= \left[-\frac{e^{-t}}{x+t}\right]_\varepsilon^A + \int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{x+t}dt.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x \in]0,+\infty[$ et tout $(\varepsilon, A) \in]0,1] \times [1,+\infty[$:

$$\boxed{\int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt = -\frac{e^{-A}}{x+A} + \frac{e^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon} - \int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{x+t}dt.}$$

(4) Montrons que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a : $f'(x) = -\frac{1}{x} + f(x)$. D'après la question précédente, on sait que, pour tout $x \in]0,+\infty[$ et tout $(\varepsilon, A) \in]0,1] \times [1,+\infty[$:

$$\int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt = -\frac{e^{-A}}{x+A} + \frac{e^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon} - \int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{x+t}dt.$$

Par passage à la limite quand ε tend vers 0 dans l'égalité ci-dessus, on trouve que, pour tout $x \in]0,+\infty[$ et tout $A \in [1,+\infty[$:

$$\int_0^A \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt = -\frac{e^{-A}}{x+A} + \frac{1}{x} - \int_0^A \frac{e^{-t}}{x+t}dt.$$

Comme e^{-A} et $\frac{1}{x+A}$ tendent tous deux vers 0 quand A tend vers $+\infty$ et que les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}dt$ convergent d'après les questions précédentes, on trouve par passage à la limite quand A tend vers $+\infty$ dans l'égalité ci-dessus que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt = \frac{1}{x} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}dt.$$

Par définition de f et d'après la question (2) de la partie II, il s'ensuit que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$-f'(x) = \frac{1}{x} - f(x).$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\boxed{f'(x) = -\frac{1}{x} + f(x).}$$

(5) Montrons que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} + f'(x).$$

D'après la question précédente, on sait que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$f'(x) = -\frac{1}{x} + f(x).$$

Comme les fonctions $x \longmapsto -\frac{1}{x}$ et f sont dérivables sur $]0,+\infty[$ d'après le cours et les questions précédentes, la fonction f' est aussi dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$. Dès lors, la fonction f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et de plus, on a pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{x} + f(x)\right)' = \frac{1}{x^2} + f'(x).$$

Mais comme les fonctions $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$ et f' sont dérivables sur $]0,+\infty[$, elles sont en particulier continues sur $]0,+\infty[$ et donc la fonction f'' est continue sur $]0,+\infty[$ comme somme de fonctions continues sur $]0,+\infty[$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0,+\infty[\text{ et : } \forall x \in]0,+\infty[,\ f''(x) = \frac{1}{x^2} + f'(x).}$$

B - Intervention d'une fonction auxiliaire g

On note $g :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $x \in]0,+\infty[$ par : $g(x) = e^{-x} f(x)$.

(1) Montrons que g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$g'(x) = -\frac{e^{-x}}{x}.$$

Comme les fonctions $x \longmapsto e^{-x}$ et f sont dérivables sur $]0,+\infty[$ d'après les questions précédentes, la fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ et de plus, on a pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$g'(x) = \left(e^{-x} f(x)\right)' = -e^{-x} f(x) + e^{-x} f'(x) = e^{-x}\left[f'(x) - f(x)\right] = e^{-x} \times -\frac{1}{x}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{g \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[\text{ et : } \forall x \in]0,+\infty[,\ g'(x) = -\frac{e^{-x}}{x}.}$$

(2) Montrons que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$ converge. Pour ce faire, on commence par remarquer que, pour tout $x \in]0,+\infty[$ et pour tout $u \geq 0$:

$$0 < \frac{e^{-u}}{u} \leq \frac{e^{-u}}{x}.$$

Comme l'intégrale exponentielle $\int_0^{+\infty} e^{-u} du$ converge d'après le cours, on obtient par linéarité que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{x} du$ converge aussi pour tout $x \in]0,+\infty[$. En particulier, l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{x} du$ converge pour tout $x \in]0,+\infty[$, et donc le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives entraine que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \text{ converge.}}$$

A présent, montrons que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$g(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du.$$

Pour ce faire, on commence par fixer un réel $A > 0$ et l'on pose pour tout $x > 0$:

$$H(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du.$$

D'après la relation de Chasles, on constate que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$H(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = \int_x^{A} \frac{e^{-u}}{u} du + \int_A^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = -\int_A^{x} \frac{e^{-u}}{u} du + \int_A^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du.$$

En outre, on peut remarquer que la fonction $h : x \longmapsto -\frac{e^{-x}}{x}$ est continue sur $]0,+\infty[$ comme quotient de fonctions continues sur $]0,+\infty[$, dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$. Comme la fonction $x \longmapsto \int_A^x -\frac{e^{-u}}{u} du$ est la primitive de la fonction h qui s'annule en $x = A$, on voit que cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, de dérivée égale à h. En particulier, comme $\int_A^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$ est une constante, on obtient que H est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et que de plus, pour tout $x > 0$:

$$H'(x) = h(x) = -\frac{e^{-x}}{x}.$$

En particulier, on voit avec la question (1) que $H' = g'$ sur $]0,+\infty[$, et donc H et g sont toutes deux des primitives de h sur $]0,+\infty[$. Dès lors, il existe un réel C tel que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$H(x) = g(x) + C. \quad (*)$$

Mais comme $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ d'après la question (4) de la partie I et que $H(x)$ est le reste d'une intégrale convergente, il s'ensuit que :

$$g(x) = e^{-x} f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad H(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Dès lors, on obtient par passage à la limite quand x tend vers $+\infty$ dans la relation $(*)$ que $0 = 0 + C$, et donc $C = 0$. Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\boxed{g(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du.}$$

Mais comme $g(x) = f(x)e^{-x}$ pour tout $x \in]0,+\infty[$, on en déduit aussi que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\boxed{f(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du.}$$

(3) Montrons que : $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \sim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{x}$. Comme $f(x) \sim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}$ d'après la question (5) de la partie I, on obtient d'après la question précédente que :

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = f(x)e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x} \times \frac{1}{x}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}.}$$

(4) Déterminons la nature de la série $\sum_{n\geq 1} n^2 \int_n^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$. D'après la question précédente, on sait que :

$$\int_n^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-n}}{n}.$$

Dès lors, on obtient avec les règles de calcul des équivalents que :

$$n^2 \times n^2 \int_n^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \underset{n\to+\infty}{\sim} n^4 \times \frac{e^{-n}}{n} \underset{x\to+\infty}{\sim} n^3 e^{-n}.$$

Comme $n^3 e^{-n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ par croissance comparée, il s'ensuit que :

$$n^2 \int_n^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Mais comme la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est à termes positifs et converge d'après le cours, le critère de négligeabilité des séries entraine que :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geq 1} n^2 \int_n^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \text{ converge.}}$$