Programme de colles en Mathématiques
ECG 2 (semaine 7 : 11 novembre 2024)

La colle débutera soit par une démonstration d'un résultat de cours (indiqué par un astérisque), soit par un exercice de début de colle. Le programme portera sur les espaces probabilisés, ainsi que sur les variables aléatoires discrètes, et plus particulièrement sur les points suivants:

(1) **Espaces probabilisés (révisions):**
Définitions et propriétés d'un univers et d'un ensemble d'événements.
Définition d'un espace probabilisable - Notion de système complet d'événements.
Définitions et propriétés de base des probabilités et des espaces probabilisés.
Formule du crible de Poincaré pour $n = 2$ et $n = 3$.
Probabilité uniforme/équiprobabilité - Propriété de limite monotone et conséquences.
Définition et propriétés des probabilités conditionnelles.
Formules des probabilités composées, des probabilités totales et de Bayes.
Indépendance de deux événements - Indépendance (mutuelle) d'événements.

(2) **Variables aléatoires discrètes (révisions):**
Définition d'une variable aléatoire et d'une variable aléatoire discrète.
"Toute combinaison linéaire, tout produit, tout minimum et tout maximum d'un nombre fini de variables aléatoires est une variable aléatoire".
Définition du support d'une variable aléatoire discrète.
Système complet d'événements associé à une variable aléatoire discrète.
Définition et propriétés de la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète.
Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète.
Loi de la composée à gauche d'une variable aléatoire discrète avec une fonction.
Définition de l'espérance pour les variables aléatoires discrètes - Propriétés de l'espérance (transfert, linéarité, positivité, croissance, existence par domination).
Définition et propriétés des moments d'ordre r d'une variable aléatoire discrète.
Définition et propriétés de la variance et de l'écart-type d'une variable aléatoire discrète.
Formule de Koenig-Huygens et formule "$V(aX + b) = a^2V(X)$".
Notion de variable aléatoire certaine, espérance et variance.
Lois uniforme, de Bernoulli, binomiale, géométrique et de Poisson : Cadre d'application, espérance **(*)** et variance **(*)** à connaître et à savoir calculer pour chacune de ces lois.

Exercices de début de colle:

Exercice 1. On dispose de 10 pièces de monnaie numérotées de 1 à 10, telles que la k-ème pièce amène "pile" avec la probabilité $\frac{k}{10}$. On prend une pièce au hasard, on la lance et on obtient "face". Quelle est la probabilité d'avoir choisi la 5-ème pièce?

Exercice 2. On considère une infinité d'urnes. On suppose que, pour tout $k \geq 1$, l'urne $n^o k$ contient 2^k boules dont une seule blanche et les autres noires, et que la probabilité de choisir la k-ème urne est égale à $\frac{1}{2^k}$. On choisit au hasard une urne, puis on en tire une boule. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche?

Exercice 3. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. Justifier que $Y = \dfrac{1}{X+1}$ admet une espérance et la calculer.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P([X = n + 1]) = \frac{4}{n}P([X = n]).$$

(1) Déterminer la loi de X.
(2) Calculer l'espérance et la variance de X.