Lycée Clemenceau **2024-2025**
ECG 2

Devoir Maison de Mathématiques n^o3 :
Espaces probabilisés - Variables aléatoires discrètes

Exercice 1. Soit n un entier ≥ 3. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on pose $a_{i,j} = 1$ si $i = j-1$ ou si $i = j+1$, et $a_{i,j} = 0$ sinon. Ecrire une fonction en Python qui, étant donné un entier $n \geq 3$, calcule et affiche la matrice $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$.

Exercice 2. Ecrire une fonction en Python qui, étant donné un vecteur V de longueur quelconque, détermine et affiche le premier rang k où se trouve le minimum des coefficients de V. Par exemple, si $V = (5,2,1,5,4,1,7)$, alors k sera égal à 3.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Compléter la fonction en Python suivante pour qu'étant donné un entier $n \geq 1$, elle calcule et affiche le nombre de coefficients strictement positifs du vecteur $V = (\sin(\ln(1)), ..., \sin(\ln(n)))$:

```
import numpy as np

def coeffstrictpositifs(n) :
    v=.....
    k=0
    for i in .....
        .....
        .....
    return k
```

Exercice 4. Un individu gravit un escalier. A chaque fois, avant de faire un pas, il lance une pièce non équilibrée qui donne pile avec la probabilité p (avec $p \in]0, \frac{1}{2}[$). Il progresse alors d'une marche s'il obtient pile et enjambe deux marches d'un coup s'il obtient face.

(1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le nombre de marches gravies à l'issue des n premiers pas, et X'_n le nombre de fois où l'individu a progressé par enjambées de 2 marches au cours des n premiers pas.
  (a) Déterminer une relation simple entre X_n et X'_n. En déduire la loi de X_n.
  (b) Donner les valeurs de l'espérance et de la variance de X_n.

(2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note Y_n le nombre aléatoire de pas juste nécessaires pour atteindre ou dépasser la n-ème marche.
  (a) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire Y_n? Justifier.
  (b) Déterminer la loi de Y_1, puis celle de Y_2 et donner leur espérance.
  (c) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout entier $n \geq 3$, on a :
$$P([Y_n = k]) = p \times P([Y_{n-1} = k-1]) + (1-p) \times P([Y_{n-2} = k-1]).$$
  (d) Montrer que, pour tout $n \geq 3$, on a :
$$E(Y_n) = pE(Y_{n-1}) + (1-p)E(Y_{n-2}) + 1.$$

(3) On considère l'ensemble E des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que, pour tout $n \geq 3$, on ait :
$$u_n = pu_{n-1} + (1-p)u_{n-2} + 1.$$
  (a) Montrer qu'il existe un réel α que l'on déterminera, tel que la suite $(\alpha n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ appartient à E.
  (b) Montrer que, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ appartient à E, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (u_n - \alpha n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie la relation : $\forall n \geq 3$, $v_n = pv_{n-1} + (1-p)v_{n-2}$.
  (c) En déduire la valeur de $E(Y_n)$.

Problème 1. Soit n un entier ≥ 2. On dispose de deux urnes U et V, l'urne U contenant une boule blanche et $(n-1)$ boules noires et l'urne V contenant une boule noire et $(n-1)$ boules blanches. Un joueur choisit une urne au hasard pour le premier tirage, puis il effectue des tirages d'une boule avec remise de cette boule dans l'urne dont elle provient, selon trois protocoles étudiés dans les trois parties de ce problème. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on désigne par B_i l'événement "on obtient une boule blanche au i-ème tirage". De plus, on désigne par X le numéro du tirage où l'on obtient, pour la première fois, une boule noire et par Y le numéro du tirage où l'on obtient, pour la première fois, une boule blanche. Enfin, on désigne par U l'événement "le premier tirage a lieu dans l'urne U".

Partie I

Dans cette partie, les tirages qui suivent le premier tirage ont lieu dans l'urne choisie au premier tirage.

(1) (a) Déterminer $P([X=1])$.

(b) Pour tout entier $k \geq 2$, écrire l'événement $[X=k]$ à l'aide de certains des B_i.

(c) En déduire que, pour tout entier $k \geq 2$:

$$P([X=k]) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\left(\frac{n-1}{n}\right) + \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

(d) Vérifier que cette formule reste valable pour $k=1$.

(2) Etablir que X admet une espérance et donner sa valeur.

(3) Montrer que X et Y suivent la même loi.

Partie II

Dans cette partie, les tirages qui suivent le premier tirage ont lieu dans l'urne U si le tirage précédent a donné une boule blanche, et dans l'urne V sinon.

(1) (a) Déterminer $P([X=1])$.

(b) En procédant comme dans la partie I, montrer que, pour tout entier $k \geq 2$:

$$P([X=k]) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^{k-2}\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

(2) Etablir que X admet une espérance et donner sa valeur.

(3) Montrer que X et Y suivent la même loi.

Partie III

Dans cette partie, les tirages qui suivent le premier tirage ont lieu dans la même urne si le tirage précédent a donné une boule blanche, et dans l'autre urne sinon.

(1) (a) Déterminer $P([X=1])$.

(b) Toujours selon la même méthode, montrer que, pour tout entier $k \geq 2$:

$$P([X=k]) = \frac{(n-1)^{k-1}+n-1}{2n^k}.$$

(c) Vérifier que cette formule reste valable pour $k=1$.

(d) Etablir que X admet une espérance, puis montrer que :

$$E(X) = \frac{n^2}{2(n-1)}.$$

(2) (a) En procédant comme à la question (1)(b), montrer que, pour tout entier $i \in \mathbb{N}^*$:

$$P([Y=2i]) = \left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1}\frac{n^2-2n+2}{2n^2}.$$

(b) Montrer également que, pour tout entier $i \in \mathbb{N}^*$:

$$P([Y=2i+1]) = \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i}.$$

(c) Vérifier que cette dernière formule reste valable pour $i=0$.

(3) On pose : $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $E_{2m}(Y) = \sum_{k=1}^{2m} kP([Y=k])$ et $\forall m \in \mathbb{N}$, $E_{2m+1}(Y) = \sum_{k=1}^{2m+1} kP([Y=k])$.

(a) Montrer que la suite $(E_{2m}(Y))_{m\in\mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite.

(b) Montrer que la suite $(E_{2m+1}(Y))_{m\in\mathbb{N}}$ converge et a même limite que $(E_{2m}(Y))_{m\in\mathbb{N}^*}$.

(c) En déduire que Y admet une espérance et que :

$$E(Y) = \frac{3n^2}{2(n^2-n+1)}.$$

(4) (a) Montrer que X et Y suivent la même loi lorsque $n=2$. Quelle est cette loi?

(b) Comment pouvait-on justifier sans calcul, les deux résultats ci-dessus?

(5) Montrer que $E(Y) \leq E(X)$ avec égalité si et seulement si $n=2$.