TRAVAUX DIRIGÉS : DIAGONALISATION

1. Réduction des endomorphismes

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie > 0, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 - 3u + 2\mathrm{Id}_E = 0$.

(1) Déterminer des réels a, b tels que $\mathrm{Id}_E = a(u - \mathrm{Id}_E) + b(u - 2\mathrm{Id}_E)$.
(2) Montrer que $E = \ker(u - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(u - 2\mathrm{Id}_E)$.
(3) En déduire que u est diagonalisable.

Exercice 2. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie > 0.

(1) Montrer que, si λ est une valeur propre non nulle de f, alors $E_\lambda(f) \subset \mathfrak{Im}(f)$.
(2) En déduire que, si f est diagonalisable, alors $E = \ker(f) \oplus \mathfrak{Im}(f)$.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$, et soit f un endomorphisme de E. On définit *le commutant de* f par $C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) |\ f \circ g = g \circ f\}$. Par la suite, on dit qu'un endomorphisme h de E *stabilise* un sous-espace vectoriel F de E (ou que F *est stable par* h) si $h(F) \subset F$.

(1) Montrer que $C(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
(2) Soit $g \in C(f)$. Montrer que g stabilise les sous-espaces propres de f.
(3) Soit $g \in C(f)$. Montrer que g stabilise le noyau et l'image de f.
(4) Dans cette question, on suppose que f admet n valeurs propres distinctes.
 (a) Soit $g \in C(f)$. Montrer que les vecteurs propres de f sont des vecteurs propres de g.
 (b) En déduire que tout élément g de $C(f)$ est diagonalisable.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n > 0$. Soit f un endomorphisme *nilpotent* de E, c'est-à-dire un endomorphisme de E pour lequel il existe un entier $p > 0$ tel que $f^p = 0$.

(1) Déterminer le spectre de f.
(2) En déduire que f est diagonalisable si et seulement si f est l'endomorphisme nul.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $E = \mathbb{R}_n[x]$ et on considère l'application f définie pour tout $P \in E$ par :

$$f(P) : x \longmapsto xP(x) - \frac{1}{n}(x^2 - 1)P'(x).$$

(1) (a) Montrer que f est un endomorphisme de E (*indication : on vérifiera que* $f(E) \subset E$).
 (b) Déterminer la matrice M de f dans la base canonique de E.
(2) Pour tout $k \in \{0, ..., n\}$, on pose $P_k : x \longmapsto (x-1)^k(x+1)^{n-k}$.
 (a) Montrer que P_k est un vecteur propre de f et trouver la valeur propre associée.
 (b) En déduire que f est diagonalisable et préciser les sous-espaces propres de f.

Exercice 6. On pose $E = \mathbb{R}_3[x]$, et on considère l'endomorphisme u de E, défini pour tout $P \in E$ par :

$$u(P) : x \longmapsto P(2 - x).$$

(1) Calculer $u^2(P)$ pour tout $P \in E$, et en déduire un polynôme annulateur non nul de u.
(2) Déterminer les valeurs propres de u, ainsi qu'une base de chaque sous-espace propre de u.

Exercice 7. Soit n un entier ≥ 3. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$, on pose $u(P) : x \longmapsto P(x+1) - P'(x)$.

(1) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
(2) Par la suite, on pose $v = u - \mathrm{Id}_E$.
 (a) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$, on a : $\deg(v(P)) \leq \deg(P) - 2$.
 (b) En déduire que le polynôme $P : x \longmapsto (x-1)^{n-1}$ est annulateur de u.
 (c) En déduire le spectre de u. L'endomorphisme u est-il diagonalisable?

Exercice 8. (HEC 2010) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $(f - \mathrm{Id})^3 \circ (f - 2\mathrm{Id}) = 0$ et $(f - \mathrm{Id})^2 \circ (f - 2\mathrm{Id}) \neq 0$. L'endomorphisme f est-il diagonalisable?

Exercice 9. (HEC 2011) Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^4 = f^2$ et dont -1 et 1 sont valeurs propres. Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 10. (ESCP 2011) Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension $n \geq 2$.

(1) Dans cette question, on suppose que u est diagonalisable, et soient $\lambda_1, ..., \lambda_k$ les valeurs propres distinctes de u. Montrer que le polynôme $m : x \longmapsto (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)...(x - \lambda_k)$ est annulateur de u.

(2) Soient f et g deux endomorphismes de E. En considérant la restriction de f à $\ker(g \circ f)$, montrer que :

$$\dim \ker(g \circ f) \leq \dim \ker(f) + \dim \ker(g).$$

(3) Dans cette question, on suppose qu'il existe un polynôme $P : x \longmapsto (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)...(x-\lambda_k)$ annulateur de u, où $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ sont des réels distincts.
  (a) Montrer que $n \leq \sum_{i=1}^{k} \dim \ker(u - \lambda_i \mathrm{Id})$.
  (b) En déduire que l'endomorphisme u est diagonalisable.

Exercice 11. (ESCP 2015) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'application définie par $f(M) = M - 2\mathrm{Tr}(M)A$, où Tr désigne l'application "trace".

(1) L'application f est-elle linéaire? Montrer que $f(A) = 0$ si et seulement si $\mathrm{Tr}(A) = \frac{1}{2}$ ou $A = 0$.
(2) (a) Montrer que, si $\mathrm{Tr}(A) \neq \frac{1}{2}$, alors $\ker(f) = \{0\}$.
  (b) Montrer que f est bijective si et seulement si $\mathrm{Tr}(A) \neq \frac{1}{2}$.
(3) Dans cette question, on suppose que $\mathrm{Tr}(A) = \frac{1}{2}$ et l'on pose $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{Tr}(M) = 0\}$.
  (a) Montrer que H et $\mathrm{Vect}(A)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
  (b) Montrer que f est le projecteur de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur H parallèlement à $\mathrm{Vect}(A)$.
(4) Montrer que $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ ssi $\mathrm{Tr}(A) = 1$ ou $A = 0$. Quels sont alors les sous-espaces propres de f?
(5) Dans cette question, on ne fait aucune hypothèse sur $\mathrm{Tr}(A)$.
  (a) Déterminer un polynôme annulateur de f.
  (b) Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$ ou $A = 0$.

Exercice 12. (HEC 2015) Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Soient f, p, q des endomorphimes de E et soient λ, μ des réels distincts tels que : $\forall k \in \{0, 1, 2\},\ f^k = \lambda^k p + \mu^k q$.

(1) Montrer que $(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \circ (f - \mu \mathrm{Id}_E) = 0$.
(2) En déduire que l'ensemble des valeurs propres de f est inclus dans $\{\lambda, \mu\}$ et que f est diagonalisable.

Exercice 13. (HEC 2015) Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit f un endomorphisme de E.

(1) Etablir l'existence d'un polynôme P non nul tel que $P(f) = 0$.
(2) Soit Q un polynôme non nul tel que $Q(f) = 0$, et de degré minimal parmi les polynômes non nuls tels que $P(f) = 0$. Montrer que toute racine de Q est une valeur propre de f.

2. Réduction des matrices

Exercice 14. Calculer les valeurs propres de la matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, déterminer si M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et si oui la diagonaliser, et ce dans chacun des cas suivants :

$$(1)\ M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2)\ M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3)\ M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4)\ M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)\ M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 15. Calculer les valeurs propres de la matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, déterminer si M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et si oui la diagonaliser, et ce dans chacun des cas suivants :

$$(1)\ M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2)\ M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3)\ M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad (4)\ M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(5)\ M = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6)\ M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad (7)\ M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8)\ M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16. Calculer les valeurs propres de la matrice $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, déterminer si M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et si oui la diagonaliser, et ce dans chacun des cas suivants :

$$(1)\ M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad (2)\ M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)\ M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 17. La matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable? Calculer A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 18. Calculer $A^3 - 3A^2 + 3A - I$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice A est-elle diagonalisable?

Exercice 19. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 3$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par X_n le vecteur colonne de composantes u_n, u_{n+1}, u_{n+2}.

(1) Justifier qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (que l'on déterminera) telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
(2) Montrer que $X_n = A^n X_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(3) Etablir que A est diagonalisable et la diagonaliser.
(4) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 20. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = \frac{i}{j}$ pour tous $i, j \in \{1, ..., n\}$. Calculer A^2 en fonction de n et A, et en déduire les valeurs propres de A.

Exercice 21. Soit n un entier ≥ 1, soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et soit D une droite vectorielle de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\mathbb{R}^n$. Par la suite, on dit qu'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ est *stable par* f si $f(F) \subset F$.

(1) Montrer que D est stable par f si et seulement si D est engendrée par un vecteur propre de f.
(2) Déterminer toutes les droites vectorielles stables par l'endomorphisme f canoniquement associé à :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 22. Soit $S \in \mathbb{R}$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la somme des coefficients par ligne est égale à S. Montrer que S est une valeur propre de A.

Exercice 23. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$, on pose $u(P) : x \longmapsto (x^2 - 1)P''(x) + (2x + 1)P'(x)$.

(1) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
(2) Déterminer la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.
(3) En déduire le spectre de u. L'endomorphisme u est-il diagonalisable? Justifier.

Exercice 24. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(1) Calculer la matrice $B = A^2 + 2I_3$, puis montrer que $B^2 = B + 2I_3$.
(2) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de B. La matrice B est-elle diagonalisable?
(3) Etablir une relation entre les valeurs propres de B et celles de A.
(4) En déduire que la matrice A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
(5) Montrer que B est inversible, et calculer B^{-1} en fonction de B et I_3.
(6) A présent, on s'intéresse aux puissances de B. On suppose que $n \geq 2$.
    (a) Justifier l'existence et l'unicité de deux polynômes $Q_n, R_n \in \mathbb{R}[x]$, avec $\deg(R_n) < 2$, tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^n = (x^2 - x - 2)Q_n(x) + R_n(x).$$

    (b) Déterminer le polynôme R_n en fonction de n.
    (c) En déduire l'expression de B^n en fonction de n, I, B.

Exercice 25. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$.

(1) Déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telle que $D = P^{-1}AP$.
(2) Soit B une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA$.
  (a) Montrer que tout vecteur propre de A est un vecteur propre de B.
  (b) En déduire que $P^{-1}BP$ est une matrice diagonale.
  (c) Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

Exercice 26. (ESCP 2010) Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f, puis justifier que A est diagonalisable.
(2) Soit D une matrice diagonale semblable à A. Déterminer un polynôme annulateur Q de D, unitaire et de degré minimal. En déduire un polynôme annulateur de A avec les mêmes propriétés.
(3) Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel $\mathcal{E}$ engendré par la famille $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$.
(4) Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}$ des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A, puis comparer $\mathcal{C}$ et $\mathcal{E}$.

Exercice 27. (HEC 2010) Soit $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, et soit E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$ engendré par la famille $\mathcal{B} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$, où $f_k : x \longmapsto x^k e^{-x}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(1) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E, et en déduire la dimension de E.
(2) Pour tout $f \in E$, on pose $D(f) = f' - f''$. Montrer que D est un endomorphisme de E.
(3) Ecrire la matrice M de D dans la base $\mathcal{B}$.
(4) La matrice M est-elle inversible? diagonalisable?

Exercice 28. (HEC 2011) On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(1) Vérifier que $A^2 + I_3 = 2A$.
(2) Montrer que A admet une seule valeur propre λ. La matrice A est-elle diagonalisable?
(3) Déterminer une base du sous-espace propre de A associé à λ.
(4) Montrer que A est semblable à B (*indication : procéder par Analyse-Synthèse*).

Exercice 29. (Matrice compagnon - HEC 2017) Soit n un entier ≥ 2, soit $(a_0, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ et soit C la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à C.

(1) Question de cours : condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice soit diagonalisable.
(2) (a) Déterminer le rang de la matrice C. Préciser le noyau de l'endomorphisme f.
  (b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice C soit inversible. Sous cette condition, expliciter la matrice C^{-1}.
(3) (a) Montrer qu'un réel λ est valeur propre de C si et seulement s'il est racine d'un polynôme qu'on explicitera en fonction des réels $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ (*indication : résoudre le système linéaire $CX = \lambda X$*).
  (b) Montrer que la matrice C est diagonalisable si et seulement si elle admet n valeurs propres distinctes (*indication : déterminer la dimension d'un sous-espace propre quelconque de C*).
(4) On pose : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & -14 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.
  (a) Déterminer les valeurs propres de M.
  (b) Etudier la diagonalisabilité de M.

3. Exercices supplémentaires

Exercice 30. Calculer les valeurs propres de la matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, déterminer si M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et si oui la diagonaliser, et ce dans chacun des cas suivants :

$$(1)\ M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix},\quad (2)\ M = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix},\quad (3)\ M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\quad (4)\ M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 31. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 32. Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1, et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à J.

(1) Déterminer une base de $\ker(f)$ et une base de $\mathfrak{Im}(f)$.
(2) Soit y un vecteur non nul de $\mathfrak{Im}(f)$. Montrer que y est vecteur propre de f. Pour quelle valeur propre?
(3) En déduire l'ensemble des valeurs propres de f.
(4) L'endomorphisme f est-il diagonalisable? Si oui, en donner une base de diagonalisation.

Exercice 33. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$, on pose $f(P) : x \longmapsto (x-a)P'(x) + P(x) - P(a)$. Par la suite, on pose aussi $e_k : x \longmapsto (x-a)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
(2) Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.
(3) En déduire le spectre de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable? Justifier.
(4) Calculer le rang de f, et en déduire une base de $\ker(f)$.
(5) Calculer $f(e_k)$ pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, et en déduire des bases des sous-espaces propres de f.

Exercice 34. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(1) (a) Calculer le reste de la division euclidienne de $E_n : x \longmapsto x^n$ par $P : x \longmapsto x^2 - x - 2$.
    (b) En déduire des réels a_n, b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I_3$.
(2) Retrouver le résultat de la question (1) à l'aide d'un raisonnement par récurrence.
(3) Diagonaliser la matrice A, puis retrouver le résultat de (1).
(4) On pose $J = A + I_3$. Calculer J^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis retrouver le résultat de (1).

Exercice 35. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(1) Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que A^n soit inversible.
(2) Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que A^n soit diagonalisable.

Exercice 36. (ESCP 2012) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et posons $E = \mathbb{R}[x]$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$u(P)(x) = e^x \int_x^{+\infty} P(t)e^{-t}dt.$$

Enfin, on pose $e_k : x \longmapsto x^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(1) Montrer que $u(P)$ est bien défini, puis calculer $u(e_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
(2) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}[x]$.
(3) Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{R}_n[x]$ l'ensemble des polynômes réels de degré $\leq n$.
    (a) Montrer que $\mathbb{R}_n[x]$ est stable par u, c'est-à-dire $u(\mathbb{R}_n[x]) \subset \mathbb{R}_n[x]$.
    (b) Soit v l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$ induit par u. Montrer que v est bijectif de $\mathbb{R}_n[x]$ sur $\mathbb{R}_n[x]$.
    (c) Calculer la matrice A de v dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.
    (d) L'endomorphisme v est-il diagonalisable? Justifier.
    (e) Déterminer l'inverse A^{-1} de A.
(4) Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geq 0$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(x) \geq 0$.

Exercice 37. (Endomorphismes cycliques - ESCP 2016) Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et soit f un endomorphisme de E. On note $C(f)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f et $R(f)$ l'ensemble des polynômes en f, c'est-à-dire :

$$C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) |\ g \circ f = f \circ g\} \quad \text{et} \quad R(f) = \{P(f) |\ P \in \mathbb{R}[x]\}.$$

Enfin, on dit qu'un endomorphisme h de E est *cyclique* s'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que la famille $(x_0, h(x_0), ..., h^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.

(1) Montrer que $C(f)$ et $R(f)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$, puis que $R(f) \subset C(f)$.

(2) Montrer que f est cyclique si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E et des réels $\alpha_0, ..., \alpha_{n-1}$ tels que :

$$\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & \alpha_{n-1} \end{pmatrix}.$$

A partir de maintenant, on suppose que l'endomorphisme f est cyclique, et on se fixe un vecteur $x_0 \in E$ tel que la famille $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.

(3) Soit $P(f) = f^n - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k$. Montrer que $P(f) = 0$ (*indication : remarquer que* $P(f)(x_0) = 0$, *puis montrer que* $P(f)(f^l(x_0)) = 0$ *pour tout* $l \in \mathbb{N}$).

(4) (a) Montrer que $(\mathrm{Id}_E, f, ..., f^{n-1})$ est une base de $R(f)$ (*indication : utiliser la division euclidienne*).

(b) En déduire que $C(f) = R(f)$ (*indication : si* $g \in C(f)$, *exprimer* $g(x_0)$ *dans la base* $\mathcal{B}$, *puis calculer* $g(f^l(x_0))$ *pour tout* $l \in \mathbb{N}$).

(5) On suppose que $\alpha_0 = 0$. Montrer que $E = \ker(f) \oplus \mathfrak{Im}(f)$ si et seulement si $\alpha_1 \neq 0$ (*indication : calculer le rang de* f, *puis une base de* $\ker(f)$ *à l'aide de* x_0 *et* f).

Exercice 38. (ESCP 2016) On pose $E = \mathbb{R}[x]$ et on considère l'application T sur E, définie par :

$$\forall P \in E, \quad T(P) : x \longmapsto (3x+8)P(x) - x(5-x)P'(x) + x^2(1-x)P''(x).$$

Enfin, on rappelle qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par T si $T(F) \subset F$.

(1) (a) Montrer que T est un endomorphisme de E.

(b) Pour quelles valeurs de n le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[x]$ est-il stable par T? Justifier.

(c) L'application E est-elle surjective sur E? Justifier.

(2) Soit P un polynôme propre de T, c'est-à-dire un polynôme $P \neq 0_E$ tel que la famille $(P, T(P))$ soit liée.

(a) Que peut valoir le degré de P? Justifier.

(b) Montrer que les polynômes propres de T appartiennent à un sous-espace vectoriel F de E de dimension finie, et que la restriction de T à F induit un endomorphisme de F (noté encore T).

(3) (a) Déterminer tous les couples $(\lambda, P) \in \mathbb{R} \times (E \setminus \{0_E\})$ tels que $T(P) = \lambda P$.

(b) L'application T est-elle injective? Justifier.

Exercice 39. (HEC 2018) On considère les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(1) Comparer leurs spectres, leurs rangs, ainsi que les dimensions de leurs sous-espaces propres.

(2) Les matrices A et B sont-elles semblables? Justifier (*indication : calculer* A^2 *et* B^2).

Exercice 40. (ESCP 2019) Soit n un entier ≥ 2 et soit A une matrice donnée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit T l'application définie pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $T(M) = AM$.

(1) Montrer que T est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(2) Montrer que T est bijectif si et seulement si la matrice A est inversible.

(3) Dans cette question, on suppose que A est diagonalisable. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ses valeurs propres et soit $(X_1, ..., X_n)$ une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on pose $M_{i,j} = X_i {}^t X_j$. Montrer que $(M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de T.

(4) Dans cette question, on suppose que T est diagonalisable. Soit X un vecteur colonne non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et soit $(M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de T. Enfin, on désigne par Φ l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, définie pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $\Phi(M) = MX$.

(a) Montrer que Φ est surjective de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (*indication : étant donnés deux vecteurs* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *tels que* $x \neq 0$, *montrer qu'il existe un endomorphisme* f *de* $\mathbb{R}^n$ *tel que* $f(x) = y$).

(b) En déduire que A est diagonalisable.