TRAVAUX DIRIGÉS : DIAGONALISATION (RÉPONSES - INDICATIONS)

1. Réduction des endomorphismes

Exercice 1.

(1) $a = 1$ et $b = -1$.
(2) Utiliser la question (1) ou procéder par Analyse-Synthèse.
(3) Conclure avec la question (2) et en effectuant une distinction de cas.

Exercice 2.

(1) Soit λ une valeur propre non nulle de f, et soit x un vecteur propre de f pour λ. Comme $f(x) = \lambda x$, on voit que $x = f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$, et donc x appartient à $\mathfrak{Im}(f)$.
(2) Montrer que $\oplus_{\lambda \neq 0} E_\lambda(f) \subset \mathfrak{Im}(f)$ et conclure.

Exercice 3.

(1) Vérifier que $C(f)$ est non vide, inclus dans $\mathcal{L}(E)$ etstable par combinaisons linéaires.
(2) Vérifier que $g(E_\lambda(f)) \subset E_\lambda(f)$.
(3) Idem qu'à la question (2).
(4) (a) Utiliser la question (2) et le fait que les sous-espaces propres sont de dimension 1.
    (b) Conclure avec une base de diagonalisation de f.

Exercice 4.

(1) $\mathrm{Sp}(f) = \{0\}$.
(2) Par double implication.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $E = \mathbb{R}_n[x]$ et on considère l'application f définie pour tout $P \in E$ par :

$$f(P) : x \longmapsto xP(x) - \frac{1}{n}(x^2 - 1)P'(x).$$

(1) (a) A faire!
    (b) On trouve que :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2/n & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3/n & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 - 1/n & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n/n \\ 0 & \cdots & 0 & 1/n & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) (a) Vérifier que $f(P_k) = \left(\frac{n - 2k}{n}\right) P_k$.
    (b) Conclure avec la question (2)(a) et vérifier que $E_{\frac{n-2k}{n}}(f) = \mathrm{Vect}(P_k)$.

Exercice 6.

(1) On trouve que $u^2(P) = P$ pour tout $P \in E$, et donc $Q : x \longmapsto x^2 - 1$ est annulateur de u.
(2) $\mathrm{Sp}(u) = \{-1, 1\}$.
Base de $E_1(u)$: $(x \longmapsto 1, x \longmapsto (x-1)^2)$.
Base de $E_{-1}(u)$: $(x \longmapsto x - 1, x \longmapsto (x-1)^3)$.

Exercice 7.

(1) A faire!
(2) (a) A vérifier en calculant $v(P)$, où $P : x \longmapsto a_0 + a_1 x + ... + a_r x^r$ et $a_r \neq 0$.
    (b) Montrer avec la question (2)(a) que $(u - \mathrm{Id}_E)^{n-1} = 0$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$.
    (c) On en déduit que $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$ et u n'est pas diagonalisable.

Exercice 8. L'endomorphisme f n'est pas diagonalisable (à montrer en raisonnant par l'absurde).

Exercice 9. Montrer que $\mathrm{Sp}(f) \subset \{0, -1, 1\}$, puis faire une distinction de cas suivant que 0 est valeur propre de f ou non.

Exercice 10.

(1) Diagonaliser u, puis lui appliquer le polynôme m.
(2) Si $h = f_{|\ker(f\circ g)}$, montrer que $\mathfrak{Im}(h) \subset \ker(g)$ et $\ker(h) \subset \ker(g)$, puis conclure avec le théorème du rang.
(3) (a) A démontrer par récurrence avec la question (2).
 (b) A faire!

Exercice 11.

(1) Vérifier que f est linéaire. Faire le calcul de $f(A)$ ensuite.
(2) (a) Montrer que $\ker(f) \subset \mathrm{Vect}(A)$ et conclure.
 (b) En dimension finie, remarquer que f est bijective si et seulement si $\ker(f) = \{0\}$.
(3) (a) Procéder par Analyse-Synthèse pour démontrer $(3)(a)$ et $(3)(b)$.
 (b) Voir $(3)(a)$!
(4) Calculer $f \circ f(M)$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Vérifier ensuite que $E_1(f) = \ker \mathrm{Tr}$ et $E_{-1}(f) = \mathrm{Vect}(A)$.
(5) (a) On trouve que $Q : x \longmapsto x^2 - (2 - 2\mathrm{Tr}(A))x + 1 - 2\mathrm{Tr}(A)$ est annulateur de f.
 (b) Procéder par double implication et par une distinction de cas avec la question $(5)(a)$.

Exercice 12.

(1) Développer $(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \circ (f - \mu \mathrm{Id}_E)$ et utiliser le fait que $\mathrm{Id}_E = p + q$, $f = \lambda p + \mu q$ et $f^2 = \lambda^2 p + \mu^2 q$.
(2) Procéder comme à l'exercice 1.

Exercice 13.

(1) Démonstration de cours à savoir refaire!
(2) Raisonner par l'absurde sur les racines de Q.

2. Réduction des matrices

Exercice 14.

(1) M est diagonalisable, $\mathrm{Sp}(M) = \{0, 2\}$, $M = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(2) M est diagonalisable, $\mathrm{Sp}(M) = \{1, 2\}$, $M = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(3) M n'est pas diagonalisable et $\mathrm{Sp}(M) = \{2\}$.

(4) M n'est pas diagonalisable et $\mathrm{Sp}(M) = \emptyset$.

(5) M n'est pas diagonalisable et $\mathrm{Sp}(M) = \{0\}$.

Exercice 15.

(1) M est diagonalisable, $\mathrm{Sp}(M) = \{2, 4\}$, $M = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

(2) M est diagonalisable, $\mathrm{Sp}(M) = \{2, 4\}$, $M = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

(3) M est diagonalisable, $\mathrm{Sp}(M) = \{0, 2\}$, $M = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(4) M est diagonalisable, $\mathrm{Sp}(M) = \{0, 1\}$, $M = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(5) M est diagonalisable, $\text{Sp}(M) = \{0, 1, -1\}$, $M = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(6) M n'est pas diagonalisable et $\text{Sp}(M) = \{1\}$.

(7) M n'est pas diagonalisable et $\text{Sp}(M) = \{1, 2\}$.

(8) M n'est pas diagonalisable et $\text{Sp}(M) = \emptyset$.

Exercice 16.

(1) M est diagonalisable, $\text{Sp}(M) = \{1, 2, 3\}$, $M = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(2) M n'est pas diagonalisable et $\text{Sp}(M) = \{1, 2\}$.

(3) M n'est pas diagonalisable et $\text{Sp}(M) = \{0, 1\}$.

Exercice 17. On trouve que A est diagonalisable, $\text{Sp}(A) = \{-1, 2, 5\}$, $A = PDP^{-1}$ avec :

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

De plus, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = \begin{pmatrix} 2((-1)^n) - 2^n & 2(-1)^n - 2^{n+1} & 0 \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^{n+1} & 0 \\ 5^n - 2^n & 2(5^n) - 2^{n+1} & 5^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 18. On trouve que $A^3 - 3A^2 + 3A - I = 0$. De plus, A n'est pas diagonalisable et $\text{Sp}(A) = \{1\}$.

Exercice 19.

(1) On voit que : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$.

(2) A démontrer par récurrence.

(3) On trouve que $\text{Sp}(A) = \{1, 2, 3\}$, A est diagonalisable et $A = PDP^{-1}$, avec :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(4) On obtient que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2^n - 1$.

Exercice 20. On trouve que $A^2 = nA$ et $\text{Sp}(A) = \{0, n\}$.

Exercice 21.

(1) A faire!

(2) $D_1 = E_1(f) = \text{Vect}((1, 1, 0))$ et $D_2 = E_2(f) = \text{Vect}((0, 0, 1))$.

Exercice 22. Calculer AX, où $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 23.

(1) A faire!

(2) Si $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$, alors on trouve que :

$$\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 6 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -n(n-1) \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & n \\ 0 & \cdots & \cdots & & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}.$$

(3) On obtient que $\mathrm{Sp}(u) = \{k(k+1),\ k \in [\![0,n]\!]\}$ et u est diagonalisable.

Exercice 24.

(1) On trouve que $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier le reste.
(2) $\mathrm{Sp}(B) = \{-1, 2\}$ et B est diagonalisable
(3) Montrer que, si λ est valeur propre de A, alors $\lambda^2 + 2$ est valeur propre de B.
(4) Raisonner par l'absurde en utilisant la question précédente.
(5) Vérifier que B est inversible et $B^{-1} = \dfrac{1}{2}(B - I_3)$.
(6) (a) Citer le théorème sur la division euclidienne.
(b) On trouve que $R_n : x \longmapsto \left[\dfrac{2^n - (-1)^n}{3}\right] x + \left[\dfrac{2^n + 2(-1)^n}{3}\right]$.
(c) On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$B^n = \left[\frac{2^n - (-1)^n}{3}\right] B + \left[\frac{2^n + 2(-1)^n}{3}\right] I_3.$$

Exercice 25.

(1) On trouve que $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
(2) (a) Soit $X \in E_\lambda(A)$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $BX = \alpha X$ (en utilisant le fait que les sous-espaces propres de A sont de dimension 1).
(b) Conclure avec la question (2)(a).
(c) Si $M^2 = A$, vérifier que $AM = MA$. On en déduit avec les questions précédentes que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation "$M^2 = A$" est donné par :

$$\mathcal{S} = \left\{ P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} P^{-1}, P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix} P^{-1}, P \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} P^{-1}, P \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix} P^{-1} \right\}.$$

Exercice 26.

(1) $\mathrm{Sp}(f) = \{0, 1, 2\}$, $E_0(f) = \mathrm{Vect}((-1,1,0))$, $E_1(f) = \mathrm{Vect}((-1,1,1))$, $E_2(f) = \mathrm{Vect}((0,1,1))$. Conclure à l'aide du spectre de f.
(2) On trouve que $Q : x \longmapsto x(x-1)(x-2)$.
(3) On obtient que $\dim \mathcal{E} = 3$.
(4) Montrer que $\dim \mathcal{C} = 3$ et $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$, et en déduire que $\mathcal{C} = \mathcal{E}$.

Exercice 27.

(1) A faire! On trouve que $\dim E = 4$.
(2) A vérifier!
(3) On trouve que : $M = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
(4) Vérifier que M est inversible et non diagonalisable.

Exercice 28.

(1) A faire!
(2) On trouve que $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$. La matrice A n'est pas diagonalisable.

(3) Base de $E_1(A)$: $\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

(4) Faire l'Analyse-Synthèse!

Exercice 29.

(1) Cf. cours de deuxième année!

(2) (a) On trouve que :

$$\mathrm{rg}(C)=\begin{cases} n-1 & \text{si} \quad a_0=0\\ n & \text{si} \quad a_0\neq 0\end{cases} \quad \text{et} \quad \ker(f)=\begin{cases} \mathrm{Vect}((1,0,...,0)) & \text{si} \quad a_0=0\\ \{(0,0,...,0)\} & \text{si} \quad a_0\neq 0\end{cases}.$$

(b) C est inversible si et seulement si $a_0\neq 0$. Dans ce cas, on a :

$$C^{-1}=\begin{pmatrix} -a_1/a_0 & -a_2/a_0 & \cdots & & -1/a_0\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

(3) (a) Résoudre le système linéaire $CX=\lambda X$ en procédant par substitutions successives. On trouve alors que λ est valeur propre de C si et seulement si $P(\lambda)=0$, où $P: x\longmapsto a_0+a_1x+...+a_{n-1}x^{n-1}+x^n$.

(b) Vérifier que $\mathrm{rg}(C-\lambda I_n)\geq n-1$ pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$. En déduire que $\dim E_\lambda(C)=1$ pour toute valeur propre λ de C. Conclure.

(4) (a) On trouve que $\mathrm{Sp}(M)=\{-2,1,4\}$.

(b) Déduire de la question (3)(b) que M n'est pas diagonalisable.

3. Exercices supplémentaires

Exercice 30. Calculer les valeurs propres de la matrice $M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, déterminer si M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et si oui la diagonaliser, et ce dans chacun des cas suivants :

(1) M est diagonalisable, $\mathrm{Sp}(M)=\{-3,-1,6\}$, $M=PDP^{-1}$ avec $P=\begin{pmatrix}-1&2&1\\-1&-5&1\\2&2&1\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-1&0\\0&0&6\end{pmatrix}$.

(2) M est diagonalisable, $\mathrm{Sp}(M)=\{0,2\}$, $M=PDP^{-1}$ avec $P=\begin{pmatrix}-1&2&3\\-1&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

(3) M n'est pas diagonalisable, $\mathrm{Sp}(M)=\{2\}$.

(4) M n'est pas diagonalisable, $\mathrm{Sp}(M)=\{0,1\}$.

Exercice 31. $\mathrm{Sp}(A)=\{-1,1\}$, $E_1(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ et $E_{-1}(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

Exercice 32. Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1, et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à J.

(1) Base de $\ker(f)$: $((-1,1,0,...,0),(-1,0,1,0,...,0),...,(-1,0,...,0,1))$. Base de $\mathfrak{Im}(f)$: $((1,...,1))$.

(2) Vérifier que $f(y)=ny$, et donc y est vecteur propre de f pour la valeur propre n.

(3) On trouve que $\mathrm{Sp}(f)=\{0,n\}$.

(4) Vérifier que f est diagonalisable. Une base $\mathcal{B}$ de diagonalisation de f est donnée par :

$$\mathcal{B}=((-1,1,0,...,0),(-1,0,1,0,...,0),...,(-1,0,...,0,1),(1,...,1)).$$

Exercice 33.

(1) A faire!

(2) Si $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$, alors on trouve que :

$$\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -2a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 6 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -na \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n+1 \end{pmatrix}.$$

(3) On trouve que $\mathrm{Sp}(f) = \{0, 2, 3, ..., n+1\}$. En déduire que f est diagonalisable.
(4) On obtient que $\mathrm{rg}(f) = n$. Base de $\ker(f)$: $(x \longmapsto 1)$.
(5) On trouve que $f(e_k) = (k+1)e_k$ pour tout $k \in [\![2, n]\!]$. Base de $E_{k+1}(f)$: (e_k).

Exercice 34.

(1) (a) On trouve comme reste : $R_n : x \longmapsto \left[\dfrac{2^n - (-1)^n}{3}\right] x + \left[\dfrac{2^n + 2(-1)^n}{3}\right]$.
(b) On en déduit que :

$$a_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}.$$

(2) A faire!
(3) On trouve que $A = PDP^{-1}$, avec :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On montre par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$, et on termine le calcul.
(4) On voit que $J^2 = 3J$, et donc on obtient par une récurrence facile que $J^k = 3^{k-1}J$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. On applique ensuite la formule du binôme à $A^n = (-I_3 + J)^n$, et enfin on trouve que :

$$A^n = (-1)^n I_3 + \left[\frac{2^n - (-1)^n}{3}\right] J.$$

Exercice 35.

(1) Vérifier que A^n est inversible pour tout $n \in \mathbb{N}$ si et seulement si A est inversible, et donc tout entier $n \in \mathbb{N}$ convient.
(2) Vérifier que A est diagonalisable. En déduire que A^n est diagonalisable pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc tout entier $n \in \mathbb{N}$ convient.

Exercice 36.

(1) Vérifier par croissances comparées que :

$$P(t)e^{-t} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

puis utiliser le critère de négligeabilité. Montrer ensuite par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$u(e_k) = e_k + ke_{k-1} + k(k-1)e_{k-2} + ... + k!e_0.$$

(2) A faire à l'aide de la question précédente!
(3) (a) A faire à l'aide de la question (1)!
(b) D'après la question (1), on voit que la famille $(v(e_0), v(e_1), ..., v(e_n))$ est échelonnée en degrés, et donc elle est libre. On vérifie avec le cardinal que cette famille est une base, et enfin on conclut que v est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$ sur $\mathbb{R}_n[x]$.
(c) On trouve que $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, avec :

$$a_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{j!}{i!} & \text{si} \quad i \leq j \\ 0 & \text{si} \quad i > j \end{cases}.$$

(d) On vérifie que $\mathrm{Sp}(v) = \{1\}$, et on en déduit que v n'est pas diagonalisable.
(e) D'après la question (1), on voit que $u(e_k) = e_k + ku(e_{k-1})$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, et donc il s'ensuit que $u(e_k) = e_k + u(e'_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En particulier, ceci nous donne que $u(e_k - e'_k) = e_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et donc il s'ensuit par linéarité de v que $v(P - P') = P$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$. En d'autres

termes, on trouve que $v^{-1}(P) = P - P'$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$. Si $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$, on en déduit que :

$$A^{-1} = \mathfrak{mat}_{\mathcal{B}}(v^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4) Posons $Q = \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}$. Alors on voit que Q est bien défini et de plus, on a $v^{-1}(Q) = Q - Q' = P$. Si $P \geq 0$ sur $\mathbb{R}$, alors $u(P) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ par positivité de l'intégrale. Donc $Q = v(P) = u(P) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 37.

(1) A faire!

(2) Si f est cyclique, considérons un vecteur x_0 de E tel que $(x_0, h(x_0), ..., h^{n-1}(x_0)) = (e_1, ..., e_n)$ soit une base de E. Alors $h^n(x_0) = h(e_n)$ s'écrit sous la forme $\alpha_0 e_1 + \alpha_1 e_2 + ... + \alpha_{n-1} e_n$. En déduire la forme de la matrice $\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Réciproque à faire!

(3) Montrer que $P(f)(x_0) = 0$, puis que $P(f)(f^l(x_0)) = f^l(P(f)(x_0)) = f^l(0) = 0$ pour tout $l \in \mathbb{N}$. Comme la famille $(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0))$ est une base de E, en déduire que $P(f) = 0$.

(4) (a) Vérifier que $(\mathrm{Id}_E, f, ..., f^{n-1})$ est génératrice de $R(f)$ à l'aide de la division euclidienne. Prouver ensuite que cette famille est libre en utilisant le fait que $(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

(b) Soit g un élément de $C(f)$. Comme la famille $(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0)) = (e_1, ..., e_n)$ est une base de E, il existe des réels $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$ tels que :

$$g(x_0) = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 f(x_0) + ... + \alpha_{n-1} f^{n-1}(x_0).$$

Dès lors, on voit que, pour tout $l \in \mathbb{N}$:

$$g(f^l(x_0)) = f^l(g(x_0)) = f^l\left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k e_{k+1}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^l(e_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^{k+l}(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k(f^l(x_0)).$$

En particulier, g et $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k$ coincident sur une base de E, et donc ces deux endomorphismes sont égaux. En d'autres termes, on a l'inclusion $C(f) \subset R(f)$. Conclure avec la question (1).

(5) On suppose que $\alpha_0 = 0$. On trouve alors que $\mathrm{rg}(f) = n - 1$ et de plus, une base de $\ker(f)$ est donnée par $(f_1) = (f^{n-1}(x_0) - \alpha_1 x_0 - ... - \alpha_{n-1} f^{n-2}(x_0))$. Si $\alpha_1 = 0$, alors f_1 appartient à $\mathfrak{Im}(f)$, et donc $\ker(f) \cap \mathfrak{Im}(f) \neq \{0\}$. Si maintenant $\alpha_1 \neq 0$, alors f_1 n'appartient pas à $\mathfrak{Im}(f)$, et donc $\ker(f) \cap \mathfrak{Im}(f) = \{0\}$. Conclure alors avec le théorème du rang.

Exercice 38.

(1) (a) A faire!

(b) $n = 3$.

(c) L'application T n'est pas surjective sur E.

(2) (a) $\deg(P) = 3$.

(b) $F = \mathbb{R}_3[x]$.

(3) (a) Si $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$, alors on trouve que :

$$\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Après calculs, on obtient que $\mathrm{Sp}(T) = \{-1, 0, 3, 8\}$ et de plus :

$$\begin{cases} E_{-1}(T) & = & \mathrm{Vect}(x \longmapsto x^3), \\ E_0(T) & = & \mathrm{Vect}(x \longmapsto 3x^3 + x^2), \\ E_3(T) & = & \mathrm{Vect}(x \longmapsto 3x^3 + 4x^2 + 3x), \\ E_8(T) & = & \mathrm{Vect}(x \longmapsto x^3 + 3x^2 + 6x + 10). \end{cases}$$

(b) L'application T n'est pas injective car 0 est valeur propre de T.

Exercice 39.

(1) $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(B) = \{0\}$, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = 2$ et $\dim E_0(A) = \dim E_0(B) = 2$.

(2) A et B ne sont pas semblables. Sinon A^2 et B^2 le seraient, et c'est impossible car $A^2 \neq 0$ et $B^2 = 0$.

Exercice 40.

(1) A faire!

(2) Si T est bijectif, alors T est surjectif et il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $T(B) = AB = I_n$. En particulier, A est inversible. Réciproquement, si A est inversible, vérifier que T a un noyau réduit à $\{0\}$ et conclure.

(3) Vérifier que $(M_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est génératrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En déduire avec le cardinal que c'est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Enfin, montrer que $f(M_{i,j}) = \lambda_i M_{i,j}$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

(4) (a) Avec l'indication donnée, montrer que Φ est surjective.

(b) Vérifier avec la question (3) que la famille $(M_{i,j}X)_{1\leq i,j\leq n}$ est génératrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On en extrait une base $\mathcal{B} = (M_{i_1,j_1}X, ..., M_{i_n,j_n}X)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Comme la famille $(M_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est une base de vecteurs propres de T, on a pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$T(M_{i_k,j_k}) = AM_{i_k,j_k} = \alpha_k M_{i_k,j_k}.$$

Dès lors, on voit que $AM_{i_k,j_k}X = \alpha_k M_{i_k,j_k}X$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, et donc $(M_{i_1,j_1}X, ..., M_{i_n,j_n}X)$ est une base de vecteurs propres de A. En particulier, la matrice A est diagonalisable.