TRAVAUX DIRIGÉS : ESPÉRANCE ET CONDITIONNEMENT

Exercice 1. Soient x, y deux réels tels que $|x|, |y| < 1$. Montrer que la série double $\sum_{i,j\geq 0} x^i y^j$ est absolument convergente et calculer sa somme. Mêmes questions pour la série double $\sum_{i,j\geq 2} \frac{1}{i^j}$.

Exercice 2. Montrer que la série double $\sum_{i,j\geq 0} \frac{(i+j)}{i!j!2^{i+j}}$ est absolument convergente, de somme e.

Exercice 3. Pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$, on pose : $a_{n,p} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p - \frac{1}{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^p$.

(1) Calculer les sommes $\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} a_{n,p}$ et $\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n,p}$.
(2) Que peut-on en déduire concernant la série double $\sum_{n,p} a_{n,p}$?

Exercice 4. Pour tous réels x, y distincts et tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, on pose $u_{i,j} = \frac{x^i y^j}{(i+j)!}$ et $I_n = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 |\ i+j = n\}$.

(1) Montrer que la série double $\sum_{i,j\geq 0} u_{i,j}$ est absolument convergente.
(2) Calculer la somme $\sum_{(i,j)\in I_n} u_{i,j}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(3) En déduire la somme de la série double $\sum_{i,j\geq 0} u_{i,j}$.

Exercice 5. A l'aide des paquets $I_p = \{(n, k) \in \mathbb{N}^2 |\ n + k = p\}$, montrer que la série double $\sum_{n,k\geq 0} \frac{1}{k!n!(n+k+1)}$ est absolument convergente et calculer sa somme.

Exercice 6. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels ≥ 0, telle que la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge.

(1) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n(n+1)}$ converge.
(2) Montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{a_n}{n(n+1)}\right)$ existe et comparer sa valeur à $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ (*indication : appliquer le théorème de Fubini à la série double* $\sum_{n,k\geq 1} b_{n,k}$, *où* $b_{n,k} = \frac{ka_n}{n(n+1)}$ *si* $n \geq k$ *et* $b_{n,k} = 0$ *si* $n < k$).

Exercice 7. Soit X une variable de Poisson de paramètre λ, et soit Y une variable aléatoire telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi de Y sachant $[X = n]$ est la loi $\mathcal{P}(n)$. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

Exercice 8. On utilise un dé non pipé et une pièce donnant "face" avec la probabilité $p \in]0, 1[$. Un jeu consiste à lancer le dé d'abord. Si l'on obtient le numéro $D = k$, alors on lance la pièce jusqu'à ce que l'on obtienne "face" pour la k-ème fois. On désigne par X le nombre de fois que l'on a dû lancer la pièce.

(1) Déterminer la loi de X sachant $[D = k]$.
(2) En déduire l'espérance de X (*indication : on admet que* $\sum_{i=r}^{+\infty}\binom{i}{r}x^{i-r} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$).

Exercice 9. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}^*$, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P([X = -n]) = P([X = n]) = \frac{1}{2n(n+1)}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par A_n l'événement $[X = -n] \cup [X = n]$.

(1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X admet une espérance sachant A_n.
(2) Etudier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} E(X|A_n)P(A_n)$.
(3) La variable aléatoire X admet-elle une espérance? Justifier.

Exercice 10. Soit $(\lambda, p) \in \mathbb{R}_+^* \times]0, 1[$ et soit N le nombre de voitures passant devant une station essence. On suppose que N suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ et que chaque voiture s'arrête à la station essence avec probabilité p, et ce indépendamment les unes des autres. Soit S le nombre de véhicules s'arrêtant à la station. Montrer que S admet une espérance et la calculer (*indication : déterminer la loi de* S *sachant* $[N = n]$).

Exercice 11. On effectue une première série de lancers d'une pièce équilibrée. On désigne par N le rang du premier pile obtenu. On effectue alors une seconde série de N lancers, et on désigne par X le nombre de piles obtenus lors de cette nouvelle série. A l'aide de la formule de l'espérance totale, montrer que X admet une espérance et la calculer (*indication : déterminer la loi de* X *sachant* $[N = n]$).

Exercice 12. (ESCP 2017) Soit $p \in]0,1[\setminus\{\frac{1}{2}\}$. Un mobile se déplace par sauts d'une unité sur les points d'un axe $(O,\vec{i})$ dont les abscisses sont des entiers naturels. Un saut vers la droite (où l'abscisse augmente d'une unité) se fait avec probabilité p, tandis qu'un saut vers le gauche se fait avec probabilité $q = 1-p$. Les différents sauts effectués sont indépendants les uns des autres.

Soit a un entier ≥ 3 et soit n un entier tel que $0 \leq n \leq a$. Le mobile démarre du point d'abscisse n et son voyage se termine lorsqu'il se trouve à l'origine ou au point A d'abscisse a (si au départ, il est en l'un de ces points, son voyage s'achève donc immédiatement). On désigne par D_n la durée du voyage, c'est-à-dire le nombre de sauts effectués jusqu'à l'arrêt, et on admet que D_n possède une espérance. Enfin, on note S l'événement "le premier saut est un saut vers la droite".

(1) Montrer que, si $0 < n < a$, alors l'ensemble $D_n(\Omega)$ n'est pas borné.
(2) (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $P_S([D_n = k]) = P([D_{n+1} = k-1])$.
 (b) En déduire que, pour tout $n \in [\![1, a-1]\!]$, on a : $E(D_n|S) = E(D_{n+1}) + 1$.
 (c) Exprimer de même $E(D_n|\overline{S})$, où $\overline{S}$ est l'événement contraire de S.
(3) (a) Que valent $E(D_0)$ et $E(D_a)$? Justifier.
 (b) Pour tout $n \in [\![0, a]\!]$, on pose $u_n = E(D_n)$. Montrer qu'il existe des réels α, β, γ que l'on précisera, tels que pour tout $n \in [\![1, a-1]\!]$:

$$u_{n+1} = \alpha u_n + \beta u_{n-1} + \gamma \quad (*)$$

 (*indication : utiliser la formule de l'espérance totale*).
 (c) Montrer qu'il existe une suite (v_n) de la forme $n \longmapsto \delta n$ vérifiant la relation $(*)$.
 (d) En déduire la valeur de $u_n = E(D_n)$ en fonction de a, n, p, q (*indication : montrer que* $(u_n - v_n)$ *vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre* 2).

1. Exercices supplémentaires

Exercice 13. Soient x, y deux réels tels que $|x|, |y| < 1$. Montrer que la série double $\sum_{i,j\geq 1} ijx^{i-1}y^{j-1}$ est absolument convergente et calculer sa somme.

Exercice 14. On admet que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. A l'aide de la relation $\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \frac{1}{p+q^2} - \frac{1}{p+q^2+1}$, établir la convergence et calculer la somme de la série double $\sum_{p\geq 0,\ q\geq 1} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$.

Exercice 15. Soit $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ la suite double définie par $u_{n,m} = 0$ si $n = m$ et $u_{n,m} = \frac{1}{n^2-m^2}$ sinon. Montrer que les sommes $\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} u_{n,m}$ et $\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,m}$ sont bien définies et différentes.

Exercice 16. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ un système complets d'événements, tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(A_n) = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Soit $p \in]0,1[$ et soit X une variable aléatoire telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de X sachant A_n est la loi $\mathcal{B}(n,p)$.

(1) Vérifier que $\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = 1$, puis que $E(X|A_n)$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
(2) La variable aléatoire X admet-elle une espérance? Justifier.

Exercice 17. (Loi binomiale négative - ESCP 2015) On lance indéfiniment une pièce de monnaie qui donne pile avec une probabilité $p \in]0,1[$, et l'on pose $q = 1-p$. Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on désigne par X le rang d'apparition du r-ème pile et par Y le nombre de faces obtenues avant l'obtention du r-ème pile.

(1) (a) Déterminer la loi de X (*indication : utiliser le nombre T de piles obtenus avant le r-ème pile*).
 (b) Montrer que X admet une espérance et la calculer.
 (c) Montrer que X admet une variance et la calculer (*indication : calculer $E(X(X+1))$*).
(2) (a) Déterminer la loi de Y. *On dit que Y suit la loi $\mathcal{BN}(r,p)$.*
 (b) Montrer que Y admet une espérance et une variance que l'on calculera.
(3) Calculer $\int_0^x t^{k-1}dt$ et en déduire que, pour tout $x \in [0,1[$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x).$$

(4) On suppose que Y suit la loi $\mathcal{BN}(2,p)$. Montrer que $Z = \frac{1}{Y+2}$ admet une espérance et la calculer.
(5) On suppose que Y suit la loi $\mathcal{BN}(1,p)$. Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Z sachant $[Y = n]$ est la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$. Montrer que Z admet une espérance et la calculer (*indication : utiliser la formule de l'espérance totale*).