TRAVAUX DIRIGÉS : ESPÉRANCE ET CONDITIONNEMENT

Exercice 1.

- En utilisant le produit, on trouve que : $\displaystyle\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} x^i y^j = \frac{1}{(1-x)(1-y)}$.
- En utilisant le théorème de Fubini, on trouve que : $\displaystyle\sum_{i,j\geq 2} \frac{1}{i^j} = 1$.

Exercice 2. Appliquer le théorème de Fubini. On trouve que la somme vaut $2e$.

Exercice 3.

(1) La première somme vaut $-1/2$ et la deuxième $1/2$.
(2) Par contraposée du théorème de Fubini, la série double $\sum_{n,p} a_{n,p}$ ne converge pas absolument.

Exercice 4.

(1) Vérifier que $\dfrac{1}{(i+j)!} \leq \dfrac{1}{i!j!}$ pour tous $i, j \geq 0$, puis conclure par produit et comparaison.
(2) On trouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I_n} u_{i,j} = \frac{(x^{n+1} - y^{n+1})}{(x-y)n!}$.
(3) Par sommation par paquets, on obtient que : $\displaystyle\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u_{i,j} = \frac{xe^x - ye^y}{x-y}$.

Exercice 5. $\displaystyle\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{k!n!(n+k+1)} = \frac{e^2-1}{2}$.

Exercice 6.

(1) Par comparaison de séries à termes positifs.
(2) Utiliser le théorème de Fubini. On trouve que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{a_n}{n(n+1)} \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Exercice 7. Utiliser la formule de l'espérance totale. On trouve que : $E(Y) = E(X) = \lambda$.

Exercice 8.

(1) Sachant $[D = k]$, on a $X(\Omega) = [\![k, +\infty[\![$ et pour tout $n \geq k$: $P_{[D=k]}(X = n) = \dbinom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}$.
(2) Avec la formule de l'espérance totale, on trouve que : $E(X) = \dfrac{7}{2p}$.

Exercice 9.

(1) Sachant A_n, la variable aléatoire X est finie, et donc ...
(2) Vérifier que $E(X|A_n) = 0$ et conclure.
(3) Etudier la série $\sum_{n\geq 1} E(|X||A_n)P(A_n)$ et en déduire que X n'admet pas d'espérance.

Exercice 10. Utiliser l'existence de l'espérance par domination et la formule de l'espérance totale. On trouve que : $E(S) = p\lambda$.

Exercice 11. On trouve que : $E(X) = 1$.

Exercice 12.

(1) Si $0 < n < a$, alors soit $0 < n - 1$, soit $n - 1 = 0$ et dans ce cas, on a $n = 1$. Si $n - 1 > 0$, on peut imaginer que le temps de parcours sera aussi grand qu'on veut si, par exemple, on passe de n à $n - 1$, puis de $n - 1$ à n, et ainsi de suite. Si $n = 1$, alors $n + 1 < a$ car $a \geq 3$. On peut alors imaginer que l'on passe de n à $n + 1$, puis de $n + 1$ à n, et ainsi de suite. Donc l'ensemble $D_n(\Omega)$ n'est pas borné.

(2) (a) Tenir compte en sachant que S est réalisé.
(b) Sommer sur k la relation de la question précédente pour obtenir le résultat.
(c) On trouve de même : $E(D_n|\overline{S}) = E(D_{n-1}) - 1$.

(3) (a) $E(D_0) = 0$ et $E(D_a) = 0$.
(b) Appliquer la formule de l'espérance totale à D_n et au système complet d'événements $(S, \overline{S})$. On obtient que, pour tout $n \geq 1$:

$$E(D_n) = pE(D_{n+1}) + qE(D_{n-1}) + 1.$$

On choisit alors $\alpha = \frac{1}{p}$, $\beta = -\frac{q}{p}$, $\gamma = -\frac{1}{p}$.
(c) La suite $(v_n) = \left(\frac{n}{q-p}\right)$ convient.
(d) La suite $(u_n - v_n) = (x_n)$ vérifie la relation suivante :

$$\forall n [\![0, a-1]\!], \quad x_n = px_{n+1} + qx_{n-1}.$$

En particulier, on a la relation $x_{n+1} = \frac{1}{p}x_n - \frac{q}{p}x_{n-1}$. L'équation caractéristique a pour racines 1 et $\frac{q}{p}$. Donc il existe des réels a, b tels que :

$$x_n = a(1)^n + b\left(\frac{q}{p}\right)^n.$$

Comme $u_0 = u_a = 0$, on trouve après résolution que :

$$u_n = E(D_n) = \frac{n}{q-p} + ap^2\left[\frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n}{(q-p)(p^2 - q^2)}\right].$$

1. Exercices supplémentaires

Exercice 13. Par produit, la série converge absolument et sa somme vaut $\frac{1}{(1-x)^2(1-y)^2}$.

Exercice 14. Utiliser le théorème de Fubini. On trouve que la somme vaut $\frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 15. Après calculs, on trouve que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} u_{n,m} = -\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,m} = \frac{3}{4}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}.$$

Exercice 16.

(1) A faire! De plus, sachant A_n, la variable aléatoire X est finie, et donc $E(X|A_n)$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
(2) La variable aléatoire X n'admet pas d'espérance.

Exercice 17.

(1) (a) On trouve que : $P(X = k) = \binom{k-1}{r-1}p^r q^{k-r}$.
(b) Utiliser le critère de négligeabilité pour les séries. On trouve que : $E(X) = \frac{r}{p}$.
(c) Idem qu'à la question précédente. On trouve que : $V(X) = \frac{rq}{p^2}$.

(2) (a) On remarque que $Y = X - r$, et on trouve que : $P(X = k) = \binom{r+k-1}{r-1}p^r q^k$.
(b) Comme $Y = X - r$, on obtient que $E(Y) = \frac{rq}{p}$ et $V(Y) = \frac{rq}{p^2}$.

(3) On trouve que $\int_0^x t^{k-1}dt = \frac{x^k}{k}$, et donc on a par linéarité de l'intégrale :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k} = \int_0^x \sum_{k=1}^{n} t^{k-1}dt = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}dt = \int_0^x \frac{1}{1-t}dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt.$$

Or, pour tout $x \in [0,1[$, on trouve par croissance de l'intégrale que :
$$0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt \leq \frac{1}{1-x}\int_0^x t^n dt \leq \frac{1}{1-x}\int_0^1 t^n dt = \frac{1}{(n+1)(1-x)}.$$
Par encadrement, on voit que $\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc :
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k} = \int_0^x \frac{1}{1-t}dt = -\ln(1-x).$$

(4) Comme $Y \geq 0$, on voit que $0 \leq Z \leq \dfrac{1}{2}$, et donc Z admet une espérance par domination. De plus, on trouve par transfert et d'après la question (3) que :
$$E(Z) = \frac{p}{q} + \frac{p^2}{q^2}\ln(q).$$

(5) Comme la loi conditionnelle de Z sachant $[Y = n]$ est la loi uniforme sur $[\![0,n]\!]$, on a : $E(Z|[Y=n]) = \dfrac{n}{2}$. De plus, on sait que $P(Y=k) = pq^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. D'après la formule de l'espérance totale et les résultats sur les séries géométriques, on trouve que :
$$E(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} E(Z|[Y=n])P(Y=n) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{2}P(Y=n) = \frac{1}{2}E(Y) = ... = \frac{q}{2p}.$$