TRAVAUX DIRIGÉS : VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

Exercice 1. Une urne contient 3 boules vertes, 2 boules blanches et une boule noire. On effectue un tirage simultané de 3 boules de l'urne. On gagne x euros si le tirage est tricolore, 1 euro s'il est bicolore et on perd $8x$ euros sinon. Calculer x pour que le jeu soit équilibré.

Exercice 2. Un forain possède deux roues séparées en 10 secteurs égaux. Sur la première roue, il y a 3 secteurs rouges et 7 blancs, et sur la deuxième, 1 secteur vert et 9 blancs. Les gains sont distribués de la façon suivante. On gagne 3 euros si les deux roues tombent sur les secteurs rouge et vert, 1 euro si une seule des deux roues tombe sur un secteur blanc, et 50 cents si les deux tombent sur des secteurs blancs. Déterminer la mise minimale que doit exiger le forain pour que son bénéfice moyen soit d'au moins 25 cents par partie.

Exercice 3. Soit $a \in \mathbb{N}^*$, et soit X une variable aléatoire réelle. Déterminer a sachant que :

(1) X est une variable binomiale sur $[\![0, ..., a]\!]$, d'espérance 6 et d'écart-type 2,
(2) X est une variable uniforme sur $[\![0, ..., a]\!]$, de variance 2.

Exercice 4. Deux urnes U_1 et U_2 contiennent chacune n boules numérotées de 1 à n. On extrait une boule de chaque urne, on note X_i le numéro de la boule tirée de l'urne U_i, et on pose $M = \max\{X_1, X_2\}$.

(1) Calculer $F_M(k)$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.
(2) En déduire la loi et l'espérance de M.

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, et posons $Y = \sin(X)$ et $Z = \ln(X)$. Montrer que Y admet une espérance. Montrer que, si X admet une espérance, alors Z admet aussi une espérance.

Exercice 6. Soit $p \in]0, 1[$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un promeneur se déplace sur un axe d'origine O. Il part de O et, à chaque pas, il lance une pièce de monnaie. S'il obtient pile (et ce avec une probabilité p), il avance d'un pas. Sinon, il recule d'un pas. Soit X la variable aléatoire égale à l'abscisse du promeneur après son n-ième pas. Soit X_1 (resp. X_2) le nombre de pas effectué vers l'avant (resp. vers l'arrière).

(1) Quelle relation y a-t-il entre X_1 et X_2? entre X, X_1, X_2?
(2) Déterminer les lois de X, X_1, X_2, et en déduire l'espérance de X.
(3) A l'aide de la question (1), calculer la variance de X.

Exercice 7. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On veut greffer R rosiers, où R est un entier ≥ 1. Pour chacun d'entre eux, on opère une greffe toutes les semaines. Chaque semaine, si la greffe ne prend pas, on recommence. Si, au bout de N semaines, la greffe n'a toujours pas pris, alors on arrête et on jette le rosier. On suppose que la probabilité qu'une greffe donnée prenne est constante, égale à un réel $p \in]0, 1[$, et que toutes les expériences sont indépendantes. Soit X_N le nombre de rosiers pour lesquels la greffe a pris au bout des N semaines.

(1) Quelle est la probabilité que la greffe ait pris sur un rosier donné au bout des N semaines?
(2) Déterminer la loi de X_N, son espérance et sa variance.
(3) Montrer que, pour tout $k \in \{0, ..., R\}$, on a :

$$\lim_{N \to +\infty} P([X_N = k]) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < R \\ 1 & \text{si } k = R \end{cases} .$$

Exercice 8. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et posons $Y = \dfrac{1}{X+1}$. Justifier que Y admet une espérance et la calculer.

Exercice 9. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n = \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{2 + a^n}{n!}\right)$.

(1) Pour quelle valeur de a la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définit-elle la loi d'une variable aléatoire?
(2) Soit a la valeur trouvée à la question (1), et soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P([X = n]) = p_n$. On admet que X admet une espérance et une variance.
   (a) Calculer l'espérance de X en fonction de a.
   (b) Calculer l'espérance de $X(X - 1)$ en fonction de a, et en déduire la variance de X.

Exercice 10. Existe-t-il un réel a tel que l'on puisse définir une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ par : $\forall k \in \mathbb{N}$, $P([X = k]) = (ak + 1)e^{-k}$?

Exercice 11. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et posons $Y = X!$. Déterminer à quelle condition sur le réel λ la variable aléatoire Y admet une espérance, et la calculer dans ce cas.

Exercice 12. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P([X = n+1]) = \frac{4}{n} P([X = n])$.

(1) Calculer la valeur de $P([X = 1])$, et en déduire la loi de X.
(2) Déterminer l'espérance et la variance de X.

Exercice 13. Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$.

(1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\sum_{k=1}^{n} kP([X = k]) = \sum_{k=0}^{n-1} P([X > k]) - nP([X > n])$.
(2) En déduire que, si X admet une espérance, alors : $E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P([X > k])$.
(3) Dans cette question, on suppose que l'on dispose d'une urne contenant N boules numérotées de 1 à N. On y effectue n tirages successifs d'une boule avec remise, et on note X le plus grand numéro obtenu.
  (a) Calculer l'espérance de X et préciser la loi de X.
  (b) Déterminer un équivalent de $E(X)$ à n fixé quand N tend vers $+\infty$.

Exercice 14. (HEC 2010) On considère une assemblée de n personnes ($n \geq 3$) qui jouent le jeu suivant. Les n personnes lancent simultanément une pièce de monnaie équilibrée, et une personne gagne la partie si elle obtient le contraire de toutes les autres. Soit X la variable aléatoire désignant le nombre de parties jouées si le jeu s'arrête et prenant la valeur 0 sinon.

(1) Calculer la probabilité qu'il y ait un vainqueur au cours d'une partie.
(2) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X.

Exercice 15. (HEC 2011) Soit n un entier ≥ 3. On considère n souris qui sont lâchées en direction de 3 cages, chaque cage pouvant contenir les n souris et chaque souris allant dans une cage au hasard. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de cages restées vides.

(1) Calculer la probabilité pour qu'une cage au moins reste vide.
(2) Calculer l'espérance de X.

Exercice 16. (QSP ESCP 2013) On retourne une à une les cartes d'un jeu ordinaire de 32 cartes. Quel est le nombre moyen de cartes qu'il faut retourner pour voir apparaître le premier as? (*indications : si X est le rang du premier as tiré, montrer que* $P([X > k]) = \frac{\binom{32-k}{4}}{\binom{32}{4}}$, *puis que* $E(X) = \sum_{k=0}^{32} P([X > k])$. *Enfin, établir la relation* $\binom{32-(k-1)}{5} - \binom{32-k}{5} = \binom{32-k}{4}$ *et conclure*).

Exercice 17. (Loi de Pascal - ESCP 2014) On considère une succession éventuellement infinie de lancers d'une pièce. On suppose que la probabilité d'obtenir pile lors d'un lancer est égale à $(1 - x)$ (avec $x \in]0, 1[$) et que la probabilité d'obtenir face est égale à x. On suppose aussi que les résultats des différents lancers sont indépendants. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par S_n le nombre de fois où l'on a obtenu pile au cours des n premiers lancers et par T_n le numéro du lancer où l'on obtient pile pour la n-ème fois.

(1) Préciser la loi de S_n, son espérance et sa variance.
(2) (a) Pour tout $(k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, montrer que : $P([T_n = n + k]) = \binom{k+n-1}{n-1}(1 - x)^n x^k$.
  (b) Montrer que $\sum_{k=0}^{+\infty} P([T_n = n + k]) = 1$. Interprétation?
  (c) Montrer que T_n admet une espérance que l'on calculera.
  (d) Calculer $E(T_n(T_n + 1))$ et en déduire la variance de T_n.
(3) Soient a, λ deux réels tels que $1 < a < \frac{1}{x}$ et $\lambda > 1$. Un joueur joue de la manière suivante. Lors du k-ème lancer, il joue la somme de a^{k-1} euros. Si pile sort, il reçoit la somme de λa^{k-1} euros et il perd sa mise. Si face sort, il perd sa mise. Puis on passe au lancer suivant. On désigne par G_n la somme des gains (positifs ou négatifs) du joueur après son n-ème succès.
  (a) Exprimer G_1 en fonction de a^{T_1}.
  (b) Après avoir justifié son existence, calculer $E(G_1)$.
  (c) Exprimer G_2 en fonction de a^{T_1} et a^{T_2}.

Exercice 18. (HEC 2018) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, admettant un moment d'ordre 2 et telle que $E(X) = E(X^2) = p$.

(1) Montrer que p est compris entre 0 et 1.
(2) Montrer que X est égale presque sûrement à une variable de Bernoulli de paramètre p.

1. Exercices supplémentaires

Exercice 19. On lance un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Si le résultat vaut 4, on extrait 4 boules d'une urne contenant 2 boules blanches et 3 boules noires. Sinon, on ne tire aucune boule. On désigne par X le résultat du dé et par Y le nombre de boules blanches tirées.

(1) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de Y.
(2) On a obtenu 2 boules blanches. Quelle est la probabilité que le résultat du dé soit pair?

Exercice 20. On lance simultanément 3 dés cubiques équilibrés. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de 1 obtenus. Si l'on effectue n jets, on note Y la variable aléatoire égale au nombre de jets où l'on obtient au moins deux numéros 1.

(1) Calculer la loi de X, puis celle de Y.
(2) Combien de jets faut-il effectuer pour obtenir au moins deux numéros 1 avec une probabilité $\geq 0,99$?

Exercice 21. Un sportif tente de franchir une succession illimitée de hauteurs numérotées. Il ne peut tenter de sauter la $(n+1)$-ème hauteur que s'il a réussi à franchir les hauteurs précédentes. On suppose que la probabilité de succès au n-ème saut est égale à $p_n = \frac{1}{n}$, et on désigne par X le numéro du dernier saut réussi.

(1) Déterminer la loi de X, puis vérifier que : $\sum_{k=1}^{+\infty} P([X=k]) = 1$.
(2) Montrer que X possède une espérance et la calculer.

Exercice 22. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient deux boules blanches et n boules noires. On effectue une succession de tirages sans remise d'une boule de l'urne, jusqu'à obtenir les deux boules blanches. On désigne par X le rang d'apparition de la première boule blanche, et par Y le rang d'apparition de la deuxième boule blanche.

(1) Montrer que, pour tout $i \in \{1, ..., n+2\}$, on a :
$$P([X=i]) = \frac{2}{n+1} - \frac{2i}{(n+1)(n+2)}.$$
(2) Calculer l'espérance et la variance de X.
(3) Déterminer la loi de Y.

Exercice 23. On place des boules en nombre illimité dans trois boites distinctes de capacité illimitée. On suppose qu'au départ, les trois boites sont vides et qu'à chaque fois qu'on place une boule, la probabilité qu'elle aille dans une boite donnée est égale à $\frac{1}{3}$. On désigne par Y la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules placées lorsque, pour la première fois, deux boites exactement contiennent au moins une boule. De même, on désigne par Z la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules placées lorsque, pour la première fois, les trois boites contiennent au moins une boule.

(1) Calculer $P([Y=k])$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
(2) Calculer $P_{[Y=k]}([Z=l])$ pour tout $(k,l) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.
(3) En déduire que, pour tout $l \geq 3$, on a : $P([Z=l]) = \left(\frac{2}{3}\right)^{l-1} - \frac{2}{3^{l-1}}$.
(4) Que vaut $P([Z=l])$ si $l \leq 2$? Justifier.
(5) Calculer les valeurs de $E(Z)$ et $V(Z)$.

Exercice 24. (ESCP 2014) Soit n un entier ≥ 2. Un rat se trouve dans une boîte. Sur les cloisons de cette boîte sont dessinées $(n-1)$ fausses portes et cette boîte comporte également une vraie porte lui permettant de sortir de la boîte. Lorsque le rat s'aperçoit qu'il a choisi une fausse porte, il revient au centre de la boîte pour un nouvel essai. On désigne par X la variable aléatoire représentant le nombre d'essais faits par l'animal pour trouver la porte qui lui permet de sortir.

(1) On suppose que le rat n'a pas de mémoire. Déterminer la loi de X.
(2) Dans cette question, on suppose que le rat n'a toujours pas de mémoire et à chaque erreur, on dessine une nouvelle fausse porte. Au départ, la cage possède une fausse porte et une vraie porte. Déterminer la loi de X dans ce cas. Cette variable aléatoire admet-elle une espérance?
(3) Dans cette question, on suppose le rat sans mémoire pendant les l premiers essais (avec $l \in \mathbb{N}^*$), puis possédant une mémoire immédiate ensuite. A partir du $(l+1)$-ème essai et tant qu'il n'est pas sorti, il évite alors la dernière porte essayée pour l'essai suivant. Soient Y et Z des variables aléatoires géométriques de paramètres respectifs $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n-1}$, et posons :
$$X' = Y \times \mathbf{1}_{[Y \leq l]} + (l+Z) \times \mathbf{1}_{[Y>l]}.$$
  (a) Déterminer la loi de X' et vérifier que $\sum_{k=1}^{+\infty} P([X'=k]) = 1$.
  (b) Montrer que X' suit la même loi que X.

Exercice 25. (Loi géométrique tronquée - ESCP 2018) Une urne contient exclusivement des boules rouges et noires indiscernables au toucher. La proportion de boules rouges est $p \in]0,1[$ et celle de boules noires est $q = 1-p$. On effectue des tirages successifs avec remise d'une boule de l'urne jusqu'à obtention d'une boule rouge. Un maximum de n tirages, avec $n \geq 1$, est cependant imposé : on décide de s'arrêter si on n'a pas tiré de boule rouge à l'issue du n-ème tirage. On note G_n la variable aléatoire égale au rang du tirage d'une boule rouge, si ce rang existe, et qui vaut 0 si aucune boule rouge n'est apparue lors des n tirages.

(1) Dans cette question, n est un entier fixé.
   (a) Déterminer la loi de G_n.
   (b) En utilisant la fonction $x \longmapsto \sum_{k=1}^{n} x^k$, montrer que :
$$E(G_n) = \frac{1 - q^n(1+np)}{p}.$$
(2) (a) Déterminer la limite de $E(G_n)$ quand n tend vers $+\infty$.
   (b) Calculer aussi la limite de $P([G_n = k])$ quand n tend vers $+\infty$, et ce pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
(3) Ce processus peut être considéré comme une partie qui est gagnée si une boule rouge est apparue lors des n tirages. Pour ce faire, on mise de la manière suivante. Pour jouer une partie, il faut payer 15 euros. Si la partie est gagnée à la k-ème boule tirée ($k \leq n$), le joueur gagne $(20-k)$ euros. On note B_n le gain aléatoire d'une partie.
   (a) Exprimer B_n en fonction de G_n, puis calculer son espérance.
   (b) On admet que, pour tout $x \in]0,1[$, on a :
$$\frac{1}{2} < \frac{1}{x} + \frac{1}{\ln(1-x)} < 1.$$
   Quelle valeur de n doit-on choisir afin de maximiser le gain d'une partie?

Exercice 26. (Fonction génératrice - ESCP 2019) Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n = P([X=n])$. On appelle *fonction génératrice de* X la fonction d'une variable réelle t définie par :
$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n.$$
Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On admet que, si la série $\sum_{n \geq r} n(n-1)...(n-r+1)p_n t^{n-r}$ converge en un point $t_0 \in [0,1]$, alors G_X est r fois dérivable sur $[0, t_0]$ et l'on a :
$$G_X^{(r)}(t_0) = \sum_{n=r}^{+\infty} n(n-1)...(n-r+1)p_n t_0^{n-r},$$
où $G_X^{(r)}$ désigne la dérivée r-ème de G_X.

(1) (a) Justifier que la fonction G_X est définie pour tout $t \in [0,1]$.
   (b) Montrer que X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n \geq 1} np_n t^{n-1}$ converge pour $t=1$. Exprimer $E(X)$ en fonction de G_X.
(2) (a) Déterminer la fonction génératrice G_Z d'une variable géométrique de paramètre p.
   (b) Retrouver à l'aide de G_Z la valeur de $E(Z)$.
   (c) Pour tout $r \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1[$, calculer la somme :
$$S_r(x) = \sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} x^{k-r}.$$
(3) On considère un schéma de Bernoulli de probabilité de succès $p \in]0,1[$, et le jeu suivant (en notant S pour succès, E pour échec et $q = 1-p$). On mise une somme M. On réalise les épreuves de Bernoulli indépendantes successives, et on gagne un somme R en euros, égale à la longueur de la première séquence opposée au premier résultat s'il y en a une, et zéro sinon. Par exemple, si les résultats des premières épreuves sont $SSSEEEEESS...$, le premier résultat est un succès, donc R vaut la longueur de la première séquence d'échecs consécutifs, soit ici $R=5$.
   (a) Déterminer la loi de R (*indication : calculer d'abord* $P([R=n] \cap [L=k])$*, où* L *est la longueur de la première séquence (de succès ou d'échecs). Dans l'exemple ci-dessus,* $L=3$).
   (b) On cherche la mise minimale M_0 pour que le casino organisateur du jeu ne perde pas d'argent en moyenne. Déterminer la fonction génératrice de R, calculer son espérance à l'aide de G_R et conclure.
   (c) Retrouver ce résultat en calculant directement l'espérance de R.