

**TRAVAUX DIRIGÉS : VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES  
(RÉPONSES - INDICATIONS)**

**Exercice 1.** On trouve que :  $x = \frac{13}{2}$ .

**Exercice 2.** La mise minimale est de  $0,995 \simeq 1$  euro.

**Exercice 3.**

- (1)  $a = 18$ .
- (2)  $a = 6$ .

**Exercice 4.**

- (1) On trouve que, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :  $F_M(k) = \frac{k^2}{n^2}$ .
- (2) On trouve que, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :  $P(M = k) = \frac{2k-1}{n^2}$ . De plus :  $E(M) = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}$ .

**Exercice 5.** Utiliser l'existence de l'espérance par domination!

**Exercice 6.**

- (1)  $X_1 + X_2 = n$  et  $X = X_1 - X_2$ .
- (2)  $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$  et  $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n, q)$  avec  $q = 1 - p$ . De plus, on a :

$$X(\Omega) = \{-n, -n+2, \dots, n-2, n\} \quad \text{et} \quad \forall k \in X(\Omega), \quad P(X = k) = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}}.$$

Par ailleurs, on trouve que :  $E(X) = n(p - q) = n(2p - 1)$ .

- (3) On a :  $V(X) = 4npq$ .

**Exercice 7.**

- (1) La proba que la greffe ait pris sur un rosier donné au bout des  $N$  semaines vaut  $1 - q^N$ , avec  $q = 1 - p$ .
- (2) On trouve que  $X_N \hookrightarrow \mathcal{B}(N, 1 - q^N)$ ,  $E(X_N) = N(1 - q^N)$  et  $V(X_N) = Nq^N(1 - q^N)$ .
- (3) A faire!

**Exercice 8.** On trouve que  $E(Y) = \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{p(n+1)}$ .

**Exercice 9.**

- (1) On trouve que :  $a = \ln(8 - 2e)$ .
- (2) (a)  $E(X) = \frac{e}{4} + \frac{ae^a}{8}$ .
- (b)  $E(X(X-1)) = \frac{e}{4} + \frac{a^2e^a}{8}$  et  $V(X) = \frac{e}{2} + \frac{a^2e^a}{8} + \frac{ae^a}{8} - \left(\frac{e}{4} + \frac{ae^a}{8}\right)^2$ .

**Exercice 10.** Non! Trouver  $a$  en calculant  $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)$ . Constater que  $a < 0$  et conclure.

**Exercice 11.**  $Y$  admet une espérance si et seulement si  $0 < \lambda < 1$  et dans ce cas, on a :  $E(Y) = \frac{1}{1-\lambda}$ .

**Exercice 12.**

- (1)  $P([X = 1]) = e^{-4}$  et  $P(X = k) = \frac{4^{k-1}e^{-4}}{(k-1)!}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ .
- (2)  $E(X) = 5$  et  $V(X) = 4$ .

**Exercice 13.**

- (1) A démontrer par récurrence ou par réarrangement des sommes.  
 (2) Conclure à l'aide de la question (1).  
 (3) (a)  $E(X) = \sum_{k=0}^{N-1} \left[ 1 - \left( \frac{k}{n} \right)^n \right]$  et pour tout  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , on a :  $P(X = k) = \left( \frac{k}{n} \right)^n - \left( \frac{k-1}{n} \right)^n$ .  
 (b) A l'aide des sommes de Riemann, on trouve que :  $E(X) \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{nN}{n+1}$ .

**Exercice 14.**

- (1) La proba qu'il y ait un vainqueur au cours d'une partie vaut  $\frac{n}{2^{n-1}}$ .  
 (2)  $X \hookrightarrow \mathcal{G} \left( \frac{n}{2^{n-1}} \right)$ ,  $E(X) = \frac{2^{n-1}}{n}$  et  $V(X) = \frac{1 - \frac{n}{2^{n-1}}}{\left( \frac{n}{2^{n-1}} \right)^2}$ .

**Exercice 15.**

- (1) La proba qu'une cage au moins reste vide vaut  $3 \left[ \left( \frac{2}{3} \right)^n - \frac{1}{3^n} \right]$ .  
 (2)  $E(X) = 3 \left( \frac{2}{3} \right)^n$ .

**Exercice 16.** Le nombre moyen de cartes qu'il faut retourner pour voir apparaître le premier as vaut  $\frac{33}{5}$ .

**Exercice 17.**

- (1)  $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1-x)$ ,  $E(S_n) = n(1-x)$  et  $V(S_n) = nx(1-x)$ .  
 (2) (a) Utiliser la question (1) et écrire que :  $P([T_n = n+k]) = P([S_{n+k-1} = k-1] \cap P_{n+k})$ .  
 (b) Utiliser la formule du binôme négatif.  
 (c)  $E(T_n) = \frac{n}{1-x}$ .  
 (d)  $E(T_n(T_n+1)) = \frac{n(n+1)}{(1-x)^2}$  et  $V(T_n) = \frac{nx}{(1-x)^2}$ .  
 (3) (a)  $G_1 = \lambda a^{T_1} - \sum_{k=0}^{T_1} a^k = \lambda a^{T_1} - a \left( \frac{a^{T_1} - 1}{a-1} \right)$ .  
 (b)  $E(G_1) = \frac{a}{a-1} + \left( \lambda - \frac{a}{a-1} \right) \left[ \frac{a(1-x)}{1-a(1-x)} \right]$ .  
 (c)  $G_2 = \lambda a^{T_1} + \lambda a^{T_2} - a \left( \frac{a^{T_2} - 1}{a-1} \right)$ .

**Exercice 18.**

- (1) Calculer  $V(X)$ , utiliser le fait que  $V(X) \geq 0$  et conclure.  
 (2) Ecrire que  $E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X=k)$ ,  $E(X^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2P(X=k)$  et partir du fait que  $E(X) = E(X^2)$ .

## 1. EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

**Exercice 19.**

- (1)  $Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ ,  $P(Y=0) = \frac{5}{6}$ ,  $P(Y=1) = \frac{1}{15}$ ,  $P(Y=2) = \frac{1}{10}$ ,  $E(Y) = \frac{4}{15}$ ,  $V(Y) = \frac{89}{225}$ .  
 (2) La proba que le résultat du dé soit pair sachant qu'on a obtenu 2 boules blanches vaut 1.

**Exercice 20.**

- (1)  $X \hookrightarrow \mathcal{B} \left( 3, \frac{1}{6} \right)$  et  $Y \hookrightarrow \mathcal{B} \left( n, \frac{2}{27} \right)$ .  
 (2)  $n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(2/27)} \simeq 1,7694$ , soit :  $n \geq 2$ .

**Exercice 21.**

$$(1) X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et pour tout } k \in \mathbb{N}, \text{ on a : } P(X = k) = \frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}.$$

Calculer la somme  $\sum_{k=1}^{+\infty} P([X = k])$  par télescopage.

$$(2) \text{ On trouve que : } E(X) = e - 2.$$

**Exercice 22.**

(1) Utiliser la formule des probas composées et effectuer un télescopage dans le produit.

$$(2) E(X) = \frac{n+3}{3} \text{ et } V(X) = \frac{n(n+3)}{18}.$$

$$(3) \forall i \in \llbracket 2, n+2 \rrbracket, P(Y = i) = \frac{2(i-1)}{(n+1)(n+2)}.$$

**Exercice 23.**

$$(1) P([Y = k]) = \frac{6}{3^k} \text{ pour tout } k \geq 2.$$

$$(2) P_{[Y=k]}([Z = l]) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{l-k-1} \text{ pour tout } k \geq 2, \text{ pour tout } l \geq 3 \text{ tels que } l > k.$$

(3) Utiliser les questions précédentes et la formule des probas totales.

$$(4) P([Z = l]) = 0 \text{ si } l \leq 2.$$

$$(5) E(Z) = \frac{11}{2} \text{ et } V(Z) = \frac{27}{4}.$$

**Exercice 24.**

$$(1) X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{n}\right).$$

$$(2) X(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } P(X = k) = \frac{1}{k(k+1)}. \text{ De plus, } X \text{ n'admet pas d'espérance.}$$

(3) (a) On trouve que :

$$P(X' = k) = \begin{cases} \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1} & \text{si } k \leq l \\ \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^l \left(1 - \frac{1}{n-1}\right)^{k-l-1} & \text{si } k \geq l+1 \end{cases}.$$

(b) A vérifier!

**Exercice 25.**

$$(1) (a) G_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket, P(G_n = 0) = q^n \text{ et pour tout } k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{ on a : } P(G_n = k) = pq^{k-1}.$$

(b) Par définition, on sait que :

$$E(G_n) = \sum_{k=1}^n kP(G_n = k) = \sum_{k=1}^n kq^{k-1}p.$$

Remarquer que  $\sum_{k=1}^n x^k = x \frac{x^n - 1}{x - 1}$  (\*) pour tout  $x \neq 1$ . Dériver ensuite l'expression (\*) pour obtenir

une formule pour  $\sum_{k=1}^n kx^{k-1}$  et conclure.

$$(2) (a) \lim_{n \rightarrow +\infty} E(G_n) = \frac{1}{p}.$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow +\infty} P([G_n = k]) = pq^{k-1} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*.$$

(3) (a) On trouve que :

$$B_n = \begin{cases} 5 - k & \text{si } G_n = k \neq 0 \\ -15 & \text{si } G_n = 0 \end{cases}.$$

Ecrire alors que  $B_n = (5 - G_n)\mathbb{1}_{\{G_n \neq 0\}} - 15\mathbb{1}_{\{G_n = 0\}}$ , et en déduire que :

$$E(B_n) = 5 - E(G_n) - 20P(G_n = 0) = 5 - \left[ \frac{1 - q^n(1 + np)}{p} \right] - 20q^n.$$

(b) Posons pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$g(x) = 5 - \left[ \frac{1 - q^x(1 + xp)}{p} \right] - 20q^x.$$

Alors, on trouve que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$g'(x) = q^x \left[ x \ln(q) + 1 + \frac{\ln(q)}{p} - 20 \ln(q) \right].$$

En particulier, on voit que  $g'(x) \leq 0$  si et seulement si  $x \geq x_0 = -\frac{1}{p} - \frac{1}{\ln(1-p)} + 20$ . Donc  $g$  est croissante avant  $x_0$ , décroissante après  $x_0$  et admet un maximum en  $x_0$ . Or, avec l'inégalité rappelée, on a :  $19 < x_0 < 19,5$ . On maximise alors le gain en prenant  $n = 19$ .

### Exercice 26.

(1) (a)  $\sum p_n$  converge et sa somme vaut 1. Donc  $\sum p_n t^n$  converge par comparaison.

(b) Par définition, on trouve que  $E(X) = G'_X(1)$ .

(2) (a) Si  $Z \leftrightarrow \mathcal{G}(p)$ , on trouve que :  $G_X(t) = \frac{pt}{1-qt}$ .

(b) Dériver  $G_Z(t)$  et calculer  $G'_Z(1)$ . Conclure avec la question (1)(b). On trouve que :  $E(Z) = \frac{1}{p}$ .

(c) A l'aide du résultat admis, on trouve que :

$$S_r(qx) = \frac{G_Z^{(r)}(x)}{r!}.$$

Comme  $G_Z(x) = -\frac{p}{q} + \frac{p}{q(1-qx)}$ , on peut montrer par des dérivations successives que :

$$S_r(x) = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}.$$

(3) (a) Montrer tout d'abord que, pour tous  $n, k \geq 1$  :

$$P([R = n] \cap [L = k]) = p^{k+1}q^n + p^nq^{k+1}.$$

En utilisant la formule des probas totales, on obtient que, pour tout  $n \geq 1$  :

$$P(R = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P([R = n] \cap [L = k]) = \dots = p^2q^{n-1} + q^2p^{n-1}.$$

(b) On trouve que, pour tout  $t \in [0, 1]$  :

$$G_R(t) = \frac{p^2t}{1-qt} + \frac{q^2t}{1-pt}.$$

Calculer  $G'_R(1)$  et en déduire que  $E(R) = 2$ .

(c) On peut retrouver ce résultat en utilisant les séries géométriques dérivées et la linéarité de  $\sum$ .