Programme de colles en Mathématiques
ECG 2 (semaine 9 : 25 novembre 2024)

La colle débutera soit par une démonstration d'un résultat de cours (indiqué par un astérisque), soit par un exercice de début de colle. Le programme portera sur l'espérance et le conditionnement, ainsi que sur les polynômes et la diagonalisation des endomorphismes, et plus particulièrement sur les points suivants:

(1) **Espérance et conditionnement:**
Définition d'un ensemble dénombrable et d'un ensemble au plus dénombrable.
Définition et propriétés des familles de réels indexées sur un ensemble dénombrable.
Définition des séries absolument convergentes indexées sur un ensemble dénombrable.
Critère de comparaison - Théorème de sommation par paquets - Linéarité - Produit de familles sommables - Théorème de Fubini pour les séries doubles absolument convergentes.
Loi d'une variable aléatoire discrète sachant un événement A de probabilité non nulle.
Espérance d'une variable aléatoire discrète sachant A - Formule de l'espérance totale.

(2) **Polynômes (révisions):**
Définition des polynômes - Opérations de base - Unicité des coefficients d'un polynôme.
Définition et propriétés du degré et de la dérivation des polynômes.
Divisibilité d'un polynôme par un polynôme non nul - Division euclidienne.
Définition des racines d'un polynôme - Critère de divisibilité par $(x-a)$.
Définition et calcul de l'ordre de multiplicité d'une racine.
Formule de Taylor pour un polynôme - Factorisation dans $\mathbb{R}[x]$.
"Le degré d'un polynôme est égal à la somme des ordres de multiplicité des racines".
"Tout polynôme de degré n admet au plus n racines distinctes".
"Tout polynôme de degré $\geq n$ ayant au moins $(n+1)$ racines distinctes est nul".
"Deux polynômes égaux en une infinité de points sont égaux".

(3) **Diagonalisation des endomorphismes:**
Définition et propriétés des valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme.
Définition et propriétés des sous-espaces propres d'un endomorphisme.
Calcul pratique des valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme.
Polynôme en un endomorphisme - polynôme annulateur d'un endomorphisme f.
"Tout endomorphisme f (en dimension finie) admet un polynôme annulateur non nul". **(*)**.
"Toute valeur propre de f est racine de tout polynôme annulateur de f". **(*)**
Définition et propriétés des endomorphismes f de E diagonalisables (avec $\dim E = n$).
"f est diagonalisable si et seulement E est somme (directe) de ses sous-espaces propres".
"Si f admet n valeurs propres distinctes, alors f est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont tous de dimension 1". **(*)**

Exercices de début de colle:

Exercice 1. Montrer que la série double $\displaystyle\sum_{i,j\geq 2} \frac{1}{i^j}$ est absolument convergente et calculer sa somme.

Exercice 2. Soit $(\lambda, p) \in \mathbb{R}_+^* \times]0,1[$ et soit N le nombre de voitures passant devant une station essence. On suppose que N suit la loi de Poisson de paramètre λ et que chaque voiture s'arrête à la station essence avec probabilité p, et ce indépendamment les unes des autres. Soit S le nombre de véhicules s'arrêtant à la station.

(1) Déterminer la loi de S sachant $[N=n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(2) Montrer que S admet une espérance et la calculer.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$, et soit f un endomorphisme de E. On définit *le commutant de* f par $C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) | \; f \circ g = g \circ f\}$.

(1) Montrer que $C(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
(2) Soit $g \in C(f)$. Montrer que g stabilise les sous-espaces propres de f.
(3) Soit $g \in C(f)$. Montrer que g stabilise le noyau et l'image de f.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n > 0$. Soit f un endomorphisme *nilpotent* de E, c'est-à-dire un endomorphisme de E tel : $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $f^p = 0$.

(1) Déterminer le spectre de f.
(2) En déduire que f est diagonalisable si et seulement si f est l'endomorphisme nul.