Corrigé du devoir Surveillé de Mathématiques $n^o 4$

Corrigé de l'exercice 1. Ecrivons une fonction en Python qui trace la courbe d'équation $y = x + x^2 \ln(1+x^2)$ sur $[0,1]$. Pour ce faire, on utilisera la commande `plt.plot` comme suit :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def tracecourbe():
    x=np.arange(0,1,0.01)
    y=x+((x**2)*np.log(1+(x*2)))
    plt.plot(x,y)
    plt.show()
```

Corrigé de l'exercice 2. Ecrivons une fonction en Python qui, étant donnés un entier $n \geq 2$ et un réel x quelconque, calcule et affiche la matrice $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, où $a_{i,j} = \frac{x^{i+j}}{i+j}$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Pour ce faire, on utilisera deux boucles `for` et on tiendra compte du décalage sur les indices, et ce comme suit :

```
import numpy as np

def matrice(n,x):
    a=np.zeros([n,n])
    for i in range(0,n):
        for j in range(0,n):
            a[i,j]=(x**(i+j+2))/(i+j+2)
    return a
```

Corrigé de l'exercice 3. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$. On montre (et on admettra) que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 3. Ecrivons une fonction en Python qui, étant donné un réel $\varepsilon > 0$, détermine le plus petit entier $n \geq 0$ tel que $|u_n - 3| \leq \varepsilon$. Pour ce faire, on va calculer les valeurs successives de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$, en vérifiant à chaque fois si $|u_n - 3| \leq \varepsilon$ ou non, et en s'arrêtant au premier entier n rencontré tel que $|u_n - 3| \leq \varepsilon$. Comme on ne sait pas a priori combien de fois il va falloir réitérer le procédé, on utilisera une boucle `while`. Plus précisément, on procèdera comme suit :

```
import numpy as np

def suite(e):
    u=0
    n=0
    while np.abs(u-3)>e:
        u=np.sqrt(2*u+3)
        n=n+1
    return n
```

Corrigé de l'exercice 4. On réalise une série de lancers indépendants d'une pièce équilibrée. On désigne par P_k (resp. F_k) l'événement "on obtient pile (resp. face) au k-ème lancer". Pour ne pas surcharger l'écriture, on écrira par exemple P_1F_2 au lieu de $P_1 \cap F_2$. On désigne par X la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient, pour la première fois, "pile" puis "face" dans cet ordre aux lancers $k-1$ et k (k étant un entier ≥ 2). Par convention, $X = 0$ si l'on n'obtient jamais une telle succession. De plus, on désigne par Y la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient, pour la première fois, "pile" puis "pile" aux lancers $k-1$ et k (k étant un entier ≥ 2). Par convention, $Y = 0$ si l'on n'obtient jamais une telle succession. Dans cet exercice, on se propose de calculer les espérances de X et de Y et de vérifier que : $E(Y) > E(X)$.

(1) (a) Calculons la probabilité $P([X=2])$. Par définition, l'événement $[X=2]$ est réalisé si et seulement si l'on obtient "pile" puis "face" dans cet ordre aux premier et deuxième lancers, c'est-à-dire si P_1F_2 est réalisé. Comme les résultats des lancers sont indépendants et que la pièce est équilibrée, on trouve que :

$$P([X=2]) = P(P_1F_2) = P(P_1)P(F_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}.$$

Dès lors, il s'ensuit que :

$$\boxed{P([X=2]) = \frac{1}{4}.}$$

(b) Soit k un entier ≥ 3. Montrons que, si le premier lancer donne "pile", alors $P_2P_3...P_{k-1}F_k$ se réalise si et seulement si $[X=k]$ se réalise. Pour ce faire, supposons que le premier lancer donne "pile", c'est-à-dire que l'événement P_1 soit réalisé. Alors l'événement $P_2P_3...P_{k-1}F_k$ se réalise si et seulement si les $(k-1)$ premiers lancers donnent "pile" et le k-ème lancer donne "face", c'est-à-dire si l'on obtient "pile" puis "face" dans cet ordre aux lancers $k-1$ et k, ou en d'autres termes si $[X=k]$ se réalise. Par conséquent, si le premier lancer donne "pile", alors :

$$\boxed{P_2P_3...P_{k-1}F_k \text{ se réalise si et seulement si } [X=k] \text{ se réalise.}}$$

(c) Montrons que, pour tout $k \geq 3$, on a :

$$P([X=k]) = \frac{1}{2}P([X=k-1]) + \frac{1}{2^k}.$$

D'après la formule des probabilités totales appliquée à l'événement $[X=k]$ et au système complet d'événements (P_1, F_1), on trouve que :

$$\begin{aligned} P([X=k]) &= P(P_1)P_{P_1}([X=k]) + P(F_1)P_{F_1}([X=k]) \\ &= \frac{1}{2}P_{P_1}([X=k]) + \frac{1}{2}P_{F_1}([X=k]) \quad (*). \end{aligned}$$

Supposons tout d'abord que l'événement P_1 soit réalisé. Alors, d'après la question précédente, on sait que $P_2P_3...P_{k-1}F_k$ se réalise si et seulement si $[X=k]$ se réalise, et donc :

$$P_{P_1}([X=k]) = P_{P_1}(P_2...P_{k-1}F_k).$$

Comme les résultats des lancers sont indépendants et que la pièce est équilibrée, on trouve que :

$$P_{P_1}([X=k]) = \frac{1}{2} \times ... \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

A présent, supposons que l'événement F_1 soit réalisé. Alors l'événement $[X=k]$ se réalise si et seulement si les $(k-1)$ lancers suivant le premier lancer donnent un "pile" puis un "face" aux $(k-2)$-ème et $(k-1)$-ème lancers et pas avant, c'est-à-dire (à un décalage près) si l'événement $[X=k-1]$ se réalise (pour les $(k-1)$ lancers suivant le premier), et donc :

$$P_{F_1}([X=k]) = P([X=k-1]).$$

Dès lors, la formule $(*)$ nous donne que, pour tout $k \geq 3$:

$$\begin{aligned} P([X=k]) &= \frac{1}{2}P_{P_1}([X=k]) + \frac{1}{2}P_{F_1}([X=k]) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2}P([X=k-1]). \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $k \geq 3$:

$$\boxed{P([X=k]) = \frac{1}{2}P([X=k-1]) + \frac{1}{2^k}.}$$

(d) Pour tout $k \geq 2$, on pose $u_k = 2^kP([X=k])$. Calculons u_k pour tout $k \geq 2$. D'après la question précédente, on trouve que, pour tout $k \geq 3$:

$$\begin{aligned} u_k &= 2^kP([X=k]) \\ &= 2^k\left[\frac{1}{2}P([X=k-1]) + \frac{1}{2^k}\right] \\ &= 2^{k-1}P([X=k-1]) + 1 \quad = \quad u_{k-1} + 1. \end{aligned}$$

En particulier, la suite $(u_k)_{k\geq 2}$ est arithmétique de raison 1, et donc pour tout $k \geq 2$:

$$u_k = u_2 + (k-2).$$

Comme $P([X=2]) = \frac{1}{4}$ d'après la question (1), on voit que $u_2 = 2^2P([X=2]) = 1$, et donc pour tout $k \geq 2$:

$$\boxed{u_k = k-1.}$$

A présent, donnons la loi de X. Comme $u_k = k-1 = 2^k P([X=k])$ pour tout $k \geq 2$ d'après les calculs précédents, il s'ensuit que, pour tout $k \geq 2$:

$$P([X=k]) = \frac{k-1}{2^k}.$$

A noter que X ne peut pas prendre la valeur 1 par définition, et donc $X(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Comme de plus la famille $([X=k])_{k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}}$ forme un système complet d'événements, on trouve que :

$$P([X=0]) + \sum_{k=2}^{+\infty} P([X=k]) = 1.$$

Dès lors, il s'ensuit par linéarité de la somme et à l'aide des propriétés des séries géométriques et de leurs dérivées que :

$$\begin{aligned}
P([X=0]) &= 1 - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-1}{2^k} \\
&= 1 - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k}{2^k} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \\
&= 1 - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k}{2^{k-1}} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \\
&= 1 - \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2^{k-1}} - 0 - 1\right] + \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} - 1 - \frac{1}{2}\right] \\
&= 1 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} - 1\right] + \left[\frac{1}{(1-\frac{1}{2})} - \frac{3}{2}\right] \\
&= 1 - \frac{1}{2}[4-1] + \left[2 - \frac{3}{2}\right] \\
&= 1 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \quad = \quad 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent, la loi de X est donnée pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ par :

$$\boxed{P([X=k]) = \begin{cases} \frac{k-1}{2^k} & \text{si} \quad k \geq 2 \\ 0 & \text{si} \quad k = 0 \end{cases}.}$$

(e) Montrons que X admet une espérance et calculons-la. Par définition, la variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}} kP([X=k])$ converge absolument. Comme cette série est à termes positifs, cela revient à vérifier que la série $\sum_{k\geq 2} kP([X=k])$ converge. Or, pour tout $k \geq 2$, on voit que :

$$kP([X=k]) = \frac{k(k-1)}{2^k} = \frac{1}{4} \times \frac{k(k-1)}{2^{k-2}}.$$

A un facteur multiplicatif près, on reconnaît le terme général de la série géométrique dérivée de raison $\frac{1}{2}$. D'après le cours, cette série converge (car $|\frac{1}{2}| < 1$), et donc X admet une espérance. De plus, l'espérance de X est donnée par :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP([X=k]) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{4} \times \frac{k(k-1)}{2^{k-2}}.$$

Par linéarité de la somme, on trouve que :

$$E(X) = \frac{1}{4} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{2^{k-2}} = \frac{1}{4} \frac{2}{(1-\frac{1}{2})^3} = \frac{16}{4} = 4.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{X \text{ admet une espérance et de plus : } E(X) = 4.}$$

(2) (a) Montrons que (F_1, P_1P_2, P_1F_2) est un système complet d'événements. Tout d'abord, on voit que F_1 et P_1P_2 (resp. F_1 et P_1F_2) sont incompatibles, car le premier lancer ne peut donner à la fois un "face" et un "pile". De plus, P_1P_2 et P_1F_2 sont incompatibles, car le deuxième lancer ne peut donner à la fois un "face" et un "pile". Reste à vérifier que $F_1 \cup P_1P_2 \cup P_1F_2$ correspond à l'événement certain Ω. Or, quelque soit la série de lancers que l'on effectue, soit le premier lancer donne un "face" (auquel cas F_1 est réalisé), soit le premier lancer donne un "pile" et le deuxième un "pile" (resp. un "face"), auquel cas P_1P_2 (resp. P_1F_2) est réalisé. Dès lors, il s'ensuit que $F_1 \cup P_1P_2 \cup P_1F_2 = \Omega$, et donc :

$$\boxed{(F_1, P_1P_2, P_1F_2) \text{ est un système complet d'événements.}}$$

(b) Montrons que, pour tout $k \geq 4$, on a :

$$P([Y = k]) = \frac{1}{2}P([Y = k-1]) + \frac{1}{4}P([Y = k-2]).$$

D'après la formule des probabilités totales appliquée à l'événement $[Y = k]$ et au système complet d'événements (F_1, P_1P_2, P_1F_2), on trouve que :

$$P([Y = k]) = P(F_1)P_{F_1}([X = k]) + P(P_1P_2)P_{P_1P_2}([X = k]) + P(P_1F_2)P_{P_1F_2}([X = k]) \quad (*).$$

Comme les résultats des lancers sont indépendants et que la pièce est équilibrée, on voit que :

$$P(F_1) = \frac{1}{2}, \quad P(P_1P_2) = P(P_1)P(P_2) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \quad P(P_1F_2) = P(P_1)P(F_2) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Dès lors, la formule $(*)$ nous donne que :

$$P([Y = k]) = \frac{1}{2}P_{F_1}([X = k]) + \frac{1}{4}P_{P_1P_2}([X = k]) + \frac{1}{4}P_{P_1F_2}([X = k]) \quad (**).$$

Supposons tout d'abord que l'événement F_1 soit réalisé. Alors l'événement $[Y = k]$ se réalise si et seulement si les $(k-1)$ lancers suivant le premier lancer donnent un "pile" puis un "pile" aux $(k-2)$-ème et $(k-1)$-ème lancers et pas avant, c'est-à-dire (à un décalage près) si l'événement $[Y = k-1]$ se réalise (pour les $(k-1)$ lancers suivant le premier), et donc :

$$P_{F_1}([Y = k]) = P([Y = k-1]).$$

A présent, supposons que l'événement P_1P_2 soit réalisé. Alors on a déjà obtenu deux "piles" successifs aux premier et deuxième lancers, et donc l'événement $[Y = 2]$ est réalisé. Dans ces conditions, l'événement $[Y = k]$ ne peut se réaliser pour tout $k \geq 4$, et donc :

$$P_{P_1P_2}([Y = k]) = 0.$$

Enfin, supposons que l'événement P_1F_2 soit réalisé. Alors l'événement $[Y = k]$ se réalise si et seulement si les $(k-2)$ lancers suivant les deux premiers lancers donnent un "pile" puis un "pile" aux $(k-3)$-ème et $(k-2)$-ème lancers suivant les deux premiers, c'est-à-dire (à un décalage près) si $[Y = k-2]$ se réalise (pour les $(k-2)$ lancers suivant les deux premiers), et donc :

$$P_{P_1F_2}([Y = k]) = P([Y = k-2]).$$

Dès lors, la formule $(**)$ nous donne que, pour tout $k \geq 4$:

$$\begin{aligned} P([Y = k]) &= \frac{1}{2}P_{F_1}([Y = k]) + 0 + \frac{1}{4}P_{P_1F_2}([Y = k]) \\ &= \frac{1}{2}P([Y = k-1]) + \frac{1}{4}P([Y = k-2]). \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $k \geq 4$:

$$\boxed{P([Y = k]) = \frac{1}{2}P([Y = k-1]) + \frac{1}{4}P([Y = k-2]).}$$

(c) Pour tout entier $k \geq 2$, on pose $v_k = P([Y = k])$. Tout d'abord, déterminons v_2 et v_3. Par définition, l'événement $[Y = 2]$ est réalisé si et seulement si l'on obtient deux "piles" successifs aux deux premiers lancers, c'est-à-dire si P_1P_2 est réalisé, et donc $[Y = 2] = P_1P_2$. Comme les résultats des lancers sont indépendants et que la pièce est équilibrée, on voit que :

$$v_2 = P([Y = 2]) = P(P_1P_2) = P(P_1)P(P_2) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Toujours par définition, on voit que l'événement $[Y = 3]$ est réalisé si et seulement si l'on obtient deux "piles" successifs pour la première fois aux deuxième et troisième lancers, c'est-à-dire si $F_1P_2P_3$

est réalisé (puisque le premier lancer doit forcément donner un "face"), et donc $[Y=3]=F_1P_2P_3$. Comme les résultats des lancers sont indépendants et que la pièce est équilibrée, on voit que :

$$v_3 = P([Y=3]) = P(F_1P_2P_3) = P(F_1)P(P_2)P(P_3) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{v_2 = \frac{1}{4} \ \text{ et } \ v_3 = \frac{1}{8}.}$$

A présent, montrons qu'en posant $v_0 = 1$ et $v_1 = 0$, on a pour tout $k \geq 2$:

$$v_k = \frac{1}{2}v_{k-1} + \frac{1}{4}v_{k-2} \quad (*).$$

Tout d'abord, on voit que cette relation est déjà vérifiée d'après la question $(2)(b)$, et ce pour tout $k \geq 4$. Reste donc à la vérifier pour $k=2$ et $k=3$. D'après les calculs précédents, on a :

$$v_2 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{4}v_0.$$

et la relation $(*)$ est valide pour $k=2$. Partant de là, on trouve que :

$$v_3 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times 0 = \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{4}v_1.$$

et la relation $(*)$ est valide pour $k=3$. Par conséquent, on a pour tout $k \geq 2$:

$$\boxed{v_k = \frac{1}{2}v_{k-1} + \frac{1}{4}v_{k-2}.}$$

(d) Déterminons tout d'abord la suite $(v_k)_{k\geq 0}$. D'après la question précédente, la suite $(v_k)_{k\geq 0}$ est récurrente linéaire d'ordre 2, et son polynôme caractéristique est donné pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$P(x) = x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}.$$

Ce dernier admet pour racines $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ après calculs. Donc il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad v_k = \alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^k + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^k.$$

Pour $k=0$ et $k=1$, on obtient le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \alpha & + & \beta & = & v_0 & = & 1 \\ \alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right) & + & \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right) & = & v_1 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Après calculs, on trouve que $\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$ et $\beta = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$, et donc pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_k &= \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^k + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^k \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{k-1} + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1-(\sqrt{5})^2}{8\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{k-1} + \frac{(\sqrt{5})^2-1}{8\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{k-1} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{k-1} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{k-1}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{v_k = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{k-1} - \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{k-1}.}$$

A présent, donnons la loi de Y. Comme $v_k = P([Y=k])$ pour tout $k \geq 2$ par définition et d'après la question précédente, on voit que, pour tout $k \geq 2$:

$$P([Y=k]) = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{k-1} - \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{k-1}.$$

A noter que Y ne peut pas prendre la valeur 1 par définition, et donc $Y(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Comme de plus la famille $([Y=k])_{k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}}$ forme un système complet d'événements, on trouve que :

$$P([Y=0]) + \sum_{k=2}^{+\infty} P([Y=k]) = 1.$$

Dès lors, on obtient par linéarité de la somme que :

$$\begin{aligned} P([Y=0]) &= 1 - \sum_{k=2}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^{k-1} - \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^{k-1} \right] \\ &= 1 - \frac{1}{2\sqrt{5}} \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^{k-1} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^{k-1}. \end{aligned}$$

En effectuant le changement d'indice $l = k-1$ dans les sommes de droite et d'après les propriétés des séries géométriques, on trouve que :

$$\begin{aligned} P([Y=0]) &= 1 - \frac{1}{2\sqrt{5}} \sum_{l=1}^{+\infty} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^{l} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \sum_{l=1}^{+\infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^{l} \\ &= 1 - \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^{k} - 1 \right] + \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^{k} - 1 \right] \\ &= 1 - \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{4}} - 1 \right] + \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{4}} - 1 \right]. \end{aligned}$$

Dès lors, il s'ensuit par des calculs simples que :

$$\begin{aligned} P([Y=0]) &= 1 - \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\frac{4}{3-\sqrt{5}} - 1 \right] + \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\frac{4}{3+\sqrt{5}} - 1 \right] \\ &= 1 - \frac{1}{2\sqrt{5}} \frac{4}{3-\sqrt{5}} + \frac{1}{2\sqrt{5}} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \frac{4}{3+\sqrt{5}} - \frac{1}{2\sqrt{5}} \\ &= 1 - \frac{1}{2\sqrt{5}} \frac{4}{3-\sqrt{5}} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \frac{4}{3+\sqrt{5}} \\ &= 1 - \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\frac{4}{3-\sqrt{5}} - \frac{4}{3+\sqrt{5}} \right] \\ &= 1 - \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\frac{12+4\sqrt{5}-12+4\sqrt{5}}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} \right] \\ &= 1 - \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\frac{8\sqrt{5}}{3^2-(\sqrt{5})^2} \right] \\ &= 1 - \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\frac{8\sqrt{5}}{4} \right] \quad = \quad 1-1 \quad = \quad 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, la loi de Y est donnée pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ par :

$$\boxed{P([Y=k]) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^{k-1} - \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^{k-1} & \text{si} \quad k \geq 2 \\ 0 & \text{si} \quad k = 0 \end{cases}.}$$

(e) Montrons que Y admet une espérance et calculons-la. Par définition, la variable aléatoire Y admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}} kP([Y=k])$ converge absolument. Comme cette série est à termes positifs, cela revient à vérifier que la série $\sum_{k\geq 2} kP([Y=k])$ converge. Or, pour tout $k \geq 2$, on voit que :

$$kP([Y=k]) = \frac{1}{2\sqrt{5}} k \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^{k-1} - \frac{1}{2\sqrt{5}} k \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^{k-1}.$$

On reconnaît alors une combinaison linéaire des termes généraux des séries géométriques dérivées de raisons $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$. D'après le cours, ces deux séries convergent (car $|\frac{1-\sqrt{5}}{4}| < 1$ et $|\frac{1+\sqrt{5}}{4}| < 1$), ce qui entraine que $\sum_{k\geq 2} kP([Y=k])$ converge par linéarité, et donc Y admet une espérance. De plus, l'espérance de Y est donnée par :

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP([X=k]) = \sum_{k=2}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\sqrt{5}} k \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{k-1} - \frac{1}{2\sqrt{5}} k \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{k-1}\right].$$

Par linéarité de la somme, on trouve que :

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{k=2}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\sqrt{5}} k \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{k-1} - \frac{1}{2\sqrt{5}} k \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{k-1}\right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}} \sum_{k=2}^{+\infty} k \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{k-1} - \frac{1}{2\sqrt{5}} \sum_{k=2}^{+\infty} k \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{k-1} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\sum_{k=0}^{+\infty} k \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{k-1} - 0 - 1\right] - \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\sum_{k=0}^{+\infty} k \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{k-1} - 0 - 1\right].
\end{aligned}$$

Dès lors, il s'ensuit d'après les propriétés des séries géométriques dérivées que :

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2} - 1\right] - \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^2} - 1\right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\frac{16}{(3-\sqrt{5})^2} - 1\right] - \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\frac{16}{(3+\sqrt{5})^2} - 1\right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\frac{16}{(3-\sqrt{5})^2} - 1 - \frac{16}{(3+\sqrt{5})^2} + 1\right] \\
&= \frac{16}{2\sqrt{5}} \left[\frac{1}{(3-\sqrt{5})^2} - \frac{1}{(3+\sqrt{5})^2}\right] \\
&= \frac{16}{2\sqrt{5}} \left[\frac{(3+\sqrt{5})^2 - (3-\sqrt{5})^2}{(3-\sqrt{5})^2(3+\sqrt{5})^2}\right] \\
&= \frac{16}{2\sqrt{5}} \left[\frac{(9+5+6\sqrt{5}) - (9+5-6\sqrt{5})}{[(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})]^2}\right] \\
&= \frac{16}{2\sqrt{5}} \left[\frac{9+5+6\sqrt{5}-9-5+6\sqrt{5}}{[3^2-(\sqrt{5})^2]^2}\right] \\
&= \frac{16}{2\sqrt{5}} \left[\frac{12\sqrt{5}}{[9-5]^2}\right] \quad = \quad \frac{16}{2\sqrt{5}} \left[\frac{12\sqrt{5}}{16}\right] \quad = \quad 6.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{Y \text{ admet une espérance et de plus : } E(Y) = 6.}$$

En particulier, on voit bien que $E(Y) > E(X)$!

Corrigé de l'exercice 5. Soit n un entier ≥ 2. On désigne par I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et par tr l'application qui, à toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, associe sa trace.

(1) (a) Montrons que $\mathfrak{Im}(\mathrm{tr}) = \mathbb{R}$. Comme la trace est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, on sait d'après le cours que $\mathfrak{Im}(\mathrm{tr})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$, et donc $\mathfrak{Im}(\mathrm{tr}) = \mathbb{R}$ ou $\mathfrak{Im}(\mathrm{tr}) = \{0\}$. Mais comme $\mathrm{tr}(I) = n \neq 0$, il s'ensuit que $\mathfrak{Im}(\mathrm{tr}) \neq \{0\}$, et donc :

$$\boxed{\mathfrak{Im}(\mathrm{tr}) = \mathbb{R}.}$$

(b) Déterminons la dimension de $\ker(\mathrm{tr})$. D'après le théorème du rang appliqué à la trace (laquelle est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$), on voit que :

$$\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2 = \dim(\ker(\mathrm{tr})) + \dim(\mathfrak{Im}(\mathrm{tr})).$$

Comme $\mathfrak{Im}(\mathrm{tr}) = \mathbb{R}$, il s'ensuit que $\dim(\mathfrak{Im}(\mathrm{tr})) = \dim(\mathbb{R}) = 1$, et donc :

$$\boxed{\dim(\ker(\mathrm{tr})) = n^2 - 1.}$$

(2) Soit f l'application qui, à tout élément $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, associe $f(M) = M + \mathrm{tr}(M)I$.

(a) Montrons que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $f(M) = M + \mathrm{tr}(M)I$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on voit que f envoie toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et donc f est une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même. Reste à montrer que f est linéaire. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et soient M_1, M_2 deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par linéarité de la trace, on trouve que :

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) &= (\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) + \mathrm{tr}(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2)I \\ &= \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + (\lambda_1 \mathrm{tr}(M_1) + \lambda_2 \mathrm{tr}(M_2))\, I \\ &= \lambda_1(M_1 + \mathrm{tr}(M_1)I) + \lambda_2(M_2 + \mathrm{tr}(M_2)I) \\ &= \lambda_1 f(M_1) + \lambda_2 f(M_2). \end{aligned}$$

Dès lors, il s'ensuit que f est linéaire, et donc :

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

(b) Déterminons les valeurs propres de f. D'après la question (1), on sait que $\dim(\ker(\mathrm{tr})) = n^2 - 1 > 0$. De plus, pour tout $M \in \ker(\mathrm{tr})$, on trouve que :

$$f(M) = M + \mathrm{tr}(M)I = M + 0 \times I = M.$$

En particulier, 1 est valeur propre de f et de plus $\ker(\mathrm{tr}) \subset E_1(f)$. Par ailleurs, on voit que :

$$f(I) = I + \mathrm{tr}(I)I = I + nI = (n+1)I.$$

Comme $I \neq 0$, il s'ensuit que $(n+1)$ est aussi valeur propre de f et de plus $\mathrm{Vect}(I) \subset E_{n+1}(f)$. Reste à montrer que 1 et $(n+1)$ sont les seules valeurs propres de f. Comme $\ker(\mathrm{tr}) \subset E_1(f)$ et $\mathrm{Vect}(I) \subset E_{n+1}(f)$, et que $E_1(f)$ et $E_{n+1}(f)$ sont en somme directe, les sous-espaces vectoriels $\ker(\mathrm{tr})$ et $\mathrm{Vect}(I)$ sont aussi en somme directe. En effet, si $M \in \ker(\mathrm{tr}) \cap \mathrm{Vect}(I)$, alors M appartient à $E_1(f) \cap E_{n+1}(f) = \{0\}$, et donc $M = 0$, ce qui entraine que $\ker(\mathrm{tr}) \cap \mathrm{Vect}(I) = \{0\}$. En particulier, comme $\ker(\mathrm{tr}) \subset E_1(f)$ et $\mathrm{Vect}(I) \subset E_{n+1}(f)$, on a l'inclusion suivante :

$$\ker(\mathrm{tr}) \oplus \mathrm{Vect}(I) \subset E_1(f) \oplus E_{n+1}(f).$$

Comme de plus $E_1(f)$ et $E_{n+1}(f)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il s'ensuit que :

$$\ker(\mathrm{tr}) \oplus \mathrm{Vect}(I) \subset E_1(f) \oplus E_{n+1}(f) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

En passant aux dimensions, on trouve que :

$$\dim(\ker(\mathrm{tr})) + \dim(\mathrm{Vect}(I)) \leq \dim(E_1(f)) + \dim(E_{n+1}(f)) \leq \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})).$$

Par définition, la famille (I) est génératrice dans $\mathrm{Vect}(I)$. Comme de plus elle est constituée d'une matrice non nulle, elle est libre et donc (I) est une base de $\mathrm{Vect}(I)$. Dès lors, on obtient avec la question (1) et la série d'inclusions précédentes que :

$$n^2 - 1 + 1 \leq \dim(E_1(f)) + \dim(E_{n+1}(f)) \leq n^2.$$

En particulier, il s'ensuit que :

$$\dim(E_1(f)) + \dim(E_{n+1}(f)) = n^2 = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})).$$

Mais comme la somme des dimensions des sous-espaces propres d'un endomorphisme d'un espace vectoriel E (de dimension finie) est toujours inférieure ou égale à la dimension de E, on en déduit que f n'admet pas d'autre valeur propre que 1 et $(n+1)$, et donc :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(f) = \{1, n+1\}.}$$

(c) Montrons que f est un isomorphisme diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. D'après la question précédente, on sait que $\mathrm{Sp}(f) = \{1, n+1\}$. En particulier, 0 n'est pas valeur propre de f, et donc f est un endomorphisme injectif de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Mais comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie, l'endomorphisme f est bijectif et donc f est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par ailleurs, on sait d'après la question précédente que :

$$\dim(E_1(f)) + \dim(E_{n+1}(f)) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})).$$

D'après le cours, on en déduit que f est diagonalisable, et donc :

$$\boxed{f \text{ est un isomorphisme diagonalisable de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

(3) Soit g l'application qui, à tout élément $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, associe $g(M) = M + \mathrm{tr}(M)J$, où J est une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle. On admet que g est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Etablissons que le polynôme $P : x \longmapsto x^2 - 2x + 1$ est annulateur de g. Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on trouve par linéarité de g et comme J est de trace nulle que :

$$\begin{aligned}
(g^2 - 2g + \mathrm{Id})(M) &= g^2(M) - 2g(M) + M \\
&= g(g(M)) - 2g(M) + M \\
&= g(M + \mathrm{tr}(M)J) - 2g(M) + M \\
&= g(M) + \mathrm{tr}(M)g(J) - 2g(M) + M \\
&= \mathrm{tr}(M)g(J) - g(M) + M \\
&= \mathrm{tr}(M)J + \mathrm{tr}(M)\mathrm{tr}(J)J - M - \mathrm{tr}(M)J + M \\
&= \mathrm{tr}(M)J + 0 - M - \mathrm{tr}(M)J + M \quad = \quad 0.
\end{aligned}$$

En particulier, il s'ensuit que $g^2 - 2g + \mathrm{Id} = 0$, et donc :

$$\boxed{P : x \longmapsto x^2 - 2x + 1 \text{ est annulateur de } g.}$$

(b) Montrons que 1 est la seule valeur propre de g. D'après la question précédente, on sait que P est un polynôme annulateur de g. Comme $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, 1 est la seule racine de P. Dès lors, comme toute valeur propre de g est racine de toute polynôme annulateur de g, il s'ensuit que 1 est la seule valeur propre possible de g. Reste à voir que 1 est effectivement valeur propre de g. D'après la question (1)(b), on sait que $\ker(\mathrm{tr})$ est de dimension > 0, et donc $\ker(\mathrm{tr}) \neq \{0\}$. De plus, pour tout élément M non nul de $\ker(\mathrm{tr})$, on voit que :

$$g(M) = M + \mathrm{tr}(M)J = M + 0 \times J = M,$$

et donc 1 est valeur propre de g. Par conséquent :

$$\boxed{1 \text{ est la seule valeur propre de } g.}$$

(c) Montrons que l'endomorphisme g n'est pas diagonalisable. Pour ce faire, on raisonne par l'absurde et on suppose que g est diagonalisable. Alors il existe une base $(M_1, ..., M_{n^2})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de g. Comme 1 est la seule valeur propre de g, les matrices $M_1, ..., M_{n^2}$ sont toutes des vecteurs propres de g pour la valeur propre 1. Dès lors, on a pour tout $k \in \{1, ..., n^2\}$:

$$g(M_k) = M_k + \mathrm{tr}(M_k)J = M_k.$$

Comme J est une matrice non nulle, il s'ensuit que $\mathrm{tr}(M_k) = 0$ pour tout $k \in \{1, ..., n^2\}$. En particulier, l'application trace est nulle sur une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et donc elle est nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vu que la trace est linéaire. Mais ceci est impossible car $\mathrm{tr}(I) = n \neq 0$. Par conséquent :

$$\boxed{\text{l'endomorphisme } g \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

Corrigé de l'exercice 6. On considère les matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ données par :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On désigne par E l'espace vectoriel engendré par (I, J, K, L), par Id l'endomorphisme identité de E, et l'on pose $A = J + K$.

(1) Montrons que (I, J, K, L) est une base de E, et donnons la dimension de E. Comme E est l'espace vectoriel engendré par (I, J, K, L), la famille (I, J, K, L) est génératrice dans E. Reste à montrer que cette famille est libre. Soient a, b, c, d des réels tels que :

$$aI + bJ + cK + dL = 0.$$

En passant aux matrices, on obtient après calculs que :

$$\begin{pmatrix} a & -b & -c & d \\ b & a & -d & -c \\ c & d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

d'où il s'ensuit que $a = b = c = d = 0$, et donc la famille (I, J, K, L) est libre. Par conséquent :

$$\boxed{(I, J, K, L) \text{ est une base de } E \text{ et } \dim E = 4.}$$

(2) (a) Exprimons JK, KL, LJ en fonction respectivement de L, J, K. Par des calculs simples (mais un peu longs), on vérifie sans peine que :

$$\boxed{JK = L, \quad KL = J, \quad LJ = K.}$$

(b) Calculons J^2, K^2, L^2. Par des calculs simples (mais un peu longs), on vérifie comme précédemment sans peine que :

$$\boxed{J^2 = K^2 = L^2 = -I.}$$

Dès lors, on obtient que :

$$KJ = K(KL) = K^2L = -IL = -L.$$

De plus, on trouve que :

$$LK = (JK)K = JK^2 = -JI = -J.$$

Enfin, on obtient de même que :

$$JL = (KL)L = KL^2 = -KI = -K.$$

Par conséquent, on vient de montrer que :

$$\boxed{KJ = -L, \quad LK = -J, \quad JL = -K.}$$

(c) Montrons que E est stable pour le produit matriciel. Pour ce faire, considérons deux éléments $M, M' \in E$. Comme (I, J, K, L) est une base de E, il existe des réels $a, b, c, d, a', b', c', d'$ tels que :

$$M = aI + bJ + cK + dL \quad \text{et} \quad M' = a'I + b'J + c'K + d'L.$$

Par distributivité du produit matriciel et d'après les questions précédentes, on trouve que :

$$\begin{aligned} MM' &= (aI + bJ + cK + dL)(a'I + b'J + c'K + d'L) \\ &= aa'I^2 + ab'IJ + ac'IK + ad'IL + ba'JI + bb'J^2 + bc'JK + bd'JL \\ &\quad + ca'KI + cb'KJ + cc'K^2 + cd'KL + da'LI + db'LJ + dc'LK + dd'K^2 \\ &= aa'I + ab'J + ac'K + ad'L + ba'J - bb'I + bc'L - bd'K \\ &\quad + ca'K - cb'L - cc'I + cd'J + da'L + db'K - dc'J - dd'I \\ &= (aa' - bb' - cc' - dd')I + (ab' + ba' + cd' - dc')J + \\ &\quad (ac' - bd' + ca' + db')K + (ad' + bc' - cb' + da')L, \end{aligned}$$

d'où il s'ensuit que MM' appartient à E, et donc :

$$\boxed{E \text{ est stable par produit matriciel.}}$$

(3) Calculons la matrice A^2. Comme $A = J + K$, on obtient d'après les questions précédentes que :

$$A^2 = (J + K)^2 = (J + K)(J + K) = J^2 + JK + KJ + K^2 = -I - L + L - I,$$

d'où il s'ensuit que :

$$\boxed{A^2 = -2I.}$$

Comme $A\left(-\frac{1}{2}A\right) = \left(-\frac{1}{2}A\right)A = I$, on en déduit que :

$$\boxed{A \text{ est inversible et } A^{-1} = -\frac{1}{2}A.}$$

(4) On considère l'application φ_A qui, à toute matrice M de E, associe la matrice $\varphi_A(M) = AMA^{-1}$.

(a) Montrons que φ_A est un endomorphisme de E. Pour ce faire, on commence par remarquer que, comme E est stable par produit matriciel et que $A^{-1} = -\frac{1}{2}A$, la matrice $\varphi_A(M) = AMA^{-1}$ appartient à E pour tout $M \in E$, et donc φ_A envoie E dans E. Reste à montrer que φ_A est linéaire. Soient M, N des éléments de E et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\varphi_A(\lambda M + \mu N) = A(\lambda M + \mu N)A^{-1} = \lambda AMA^{-1} + \mu ANA^{-1} = \lambda\varphi_A(M) + \mu\varphi_A(N),$$

d'où il s'ensuit que φ_A est linéaire, et donc :

$$\boxed{\varphi_A \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

(b) Déterminons $\ker\varphi_A$, puis montrons que φ_A est un isomorphisme de E dans E. Soit $M \in \ker\varphi_A$. Alors $\varphi_A(M) = AMA^{-1} = 0$, ce qui entraine que :

$$M = IMI = (A^{-1}A)M(A^{-1}A) = A^{-1}(AMA^{-1})A = A^{-1} \times 0 \times A = 0.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\ker\varphi_A = \{0_E\}.}$$

En particulier, on voit que φ_A est un endomorphisme injectif de E. Comme E est de dimension finie, il s'ensuit que φ_A est un endomorphisme bijectif de E, et donc :

$$\boxed{\varphi_A \text{ est un isomorphisme de } E \text{ dans } E.}$$

(c) Ecrivons la matrice Φ_A de φ_A dans la base (I, J, K, L). D'après les questions précédentes, on a :

$$\varphi_A(I) = AIA^{-1} = AA^{-1} = I.$$

De la même manière, comme $\varphi_A(J) = AJA^{-1}$, on obtient que :

$$\begin{aligned}
\varphi_A(J) &= -\frac{1}{2}(J+K)J(J+K) \\
&= -\frac{1}{2}(J^3 + J^2K + KJ^2 + KJK) \\
&= -\frac{1}{2}(J^2J - IK - KI + KL) \\
&= -\frac{1}{2}(-IJ - K - K + J) \\
&= -\frac{1}{2}(-J - K - K + J),
\end{aligned}$$

d'où il s'ensuit que $\varphi_A(J) = K$. Par des calculs analogues, on montre que :

$$\varphi_A(K) = J \quad \text{et} \quad \varphi_A(L) = -L.$$

Par conséquent, la matrice Φ_A de φ_A dans la base (I, J, K, L) est donnée par :

$$\boxed{\Phi_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

(d) Donnons les valeurs propres de φ_A ainsi que les sous-espaces propres associés. Par un calcul simple, on vérifie que $\Phi_A^2 = I_4$. Dès lors, le polynôme $P : x \longmapsto x^2 - 1$ est annulateur de Φ_A, et donc de φ_A. Comme $-1, 1$ sont les seules racines de P, l'endomorphisme φ_A admet $-1, 1$ pour valeurs propres éventuelles. Or, par linéarité de φ_A, on obtient que :

$$\left\{\begin{array}{l}
\varphi_A(I) = I \\
\varphi_A(J+K) = \varphi_A(J) + \varphi_A(K) = K + J = J + K \\
\varphi_A(J-K) = \varphi_A(J) - \varphi_A(K) = K - J = -(J-K) \\
\varphi_A(L) = -L
\end{array}\right. .$$

Dès lors, on voit que $I, J+K$ sont des vecteurs propres de φ_A pour la valeur propre 1, et que $J-K, L$ sont des vecteurs propres de φ_A pour la valeur propre -1. En particulier :

$$\boxed{\varphi_A \text{ admet } -1 \text{ et } 1 \text{ pour valeurs propres.}}$$

Mais comme I et $J+K$ ne sont pas colinéaires, ainsi que $J-K$ et L, les familles $(I, J+K)$ et $(J-K, L)$ sont des familles libres de $E_1(\varphi_A)$ et $E_{-1}(\varphi_A)$ respectivement. En particulier, on a :

$$\dim E_1(\varphi_A) \geq 2 \quad \text{et} \quad \dim E_{-1}(\varphi_A) \geq 2.$$

Comme les sous-espaces propres de φ_A sont des sous-espaces de E en somme directe, on a :

$$2+2 \leq \dim E_1(\varphi_A) + \dim E_{-1}(\varphi_A) \leq \dim E = 4,$$

d'où il s'ensuit que $E_1(\varphi_A)$ et $\dim E_{-1}(\varphi_A)$ sont de dimension 2. Mais comme $(I, J+K)$ et $(J-K, L)$ sont des familles libres de $E_1(\varphi_A)$ et $E_{-1}(\varphi_A)$ qui comptent chacune deux éléments, on en déduit que ce sont des bases de $E_1(\varphi_A)$ et $E_{-1}(\varphi_A)$. En particulier :

$$\boxed{E_1(\varphi_A) = \mathrm{Vect}(I, J+K) \quad \text{et} \quad E_{-1}(\varphi_A) = \mathrm{Vect}(J-K, L).}$$

(e) D'après la question précédente, on sait que :

$$\dim E_1(\varphi_A) + \dim E_{-1}(\varphi_A) = 4 = \dim E.$$

D'après le cours, il s'ensuit que l'endomorphisme φ_A est diagonalisable. Mais comme Φ_A est la matrice de φ_A dans la base (I, J, K, L), on en déduit que :

$$\boxed{\text{la matrice } \Phi_A \text{ est diagonalisable.}}$$

Corrigé du problème 1.
Dans ce problème, n désigne un entier naturel non nul et $\mathbb{R}_n[x]$ est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré $\leq n$. On note $\mathcal{B} = (e_0, e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$. On rappelle que $e_0 : x \longmapsto 1$ et que : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $e_k : x \longmapsto x^k$.

Partie I : étude d'une application définie sur $\mathbb{R}_n[x]$

On considère l'application φ, qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$ associe $\varphi(P) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}$, où $P^{(k)}$ désigne la dérivée k-ème de P avec la convention $P^{(0)} = P$.

(1) Montrons que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$. Pour ce faire, on peut commencer par constater que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$, $P^{(k)}$ est un polynôme de degré $\leq n$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. D'après les propriétés du degré, on obtient que $\varphi(P) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}$ est un polynôme de degré $\leq n$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$, et donc φ est une application de $\mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}_n[x]$. Reste à vérifier que φ est linéaire. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et soient P_1, P_2 des éléments de $\mathbb{R}_n[x]$. Comme la dérivation est linéaire, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(x) &= \sum_{k=0}^n (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)^{(k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^n \lambda_1 (P_1)^{(k)}(x) + \lambda_2 (P_2)^{(k)}(x) \\ &= \lambda_1 \sum_{k=0}^n (P_1)^{(k)}(x) + \lambda_2 \sum_{k=0}^n (P_2)^{(k)}(x) \quad = \quad \lambda_1 \varphi(P_1)(x) + \lambda_2 \varphi(P_2)(x), \end{aligned}$$

et donc φ est linéaire. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[x].}$$

(2) (a) Calculons $\varphi(e_0)$ et déterminons une valeur propre de φ. Comme $e_0 : x \longmapsto 1$ par définition, on voit que $e_0^{(k)} = 0$ pour tout entier $k \geq 1$, ce qui entraine que :

$$\boxed{\varphi(e_0) = e_0.}$$

Mais comme $e_0 \neq 0$, e_0 est un vecteur propre de φ pour la valeur propre 1, et donc :

$$\boxed{1 \text{ est valeur propre de } \varphi.}$$

(b) Montrons que : $\forall j \in [\![1,n]\!],\ \varphi(e_j) - e_j \in \mathbb{R}_{j-1}[x]$. Pour ce faire, fixons un indice $j \in [\![1,n]\!]$. D'après les propriétés de la dérivation, on voit que $(e_j)^{(k)}$ est un polynôme de degré $j-k$ pour tout $k \in [\![1,j]\!]$ et que $(e_j)^{(k)} = 0$ pour tout $k > j$. Dans tous les cas, le polynôme $(e_j)^{(k)}$ est de degré $\leq j-k \leq j-1$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$. D'après les propriétés du degré, il s'ensuit que :

$$\deg\left(\varphi(e_j) - e_j\right) = \deg\left(\sum_{k=1}^{n} (e_j)^{(k)}\right) \leq j-1.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\forall j \in [\![1,n]\!],\ \ \varphi(e_j) - e_j \in \mathbb{R}_{j-1}[x].}$$

(c) Montrons que la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire et que la seule valeur propre de φ est celle trouvée à la question $(2)(a)$. D'après la question précédente, on sait que $\varphi(e_j) - e_j$ appartient à $\mathbb{R}_{j-1}[x]$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$. Comme $(e_0, ..., e_{j-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{j-1}[x]$, il existe des réels $a_{0,j}, ..., a_{j-1,j}$ tels que $\varphi(e_j) = a_{0,j}e_0 + ... + a_{j-1,j}e_{j-1} + e_j$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$. Dès lors, la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par :

$$\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & a_{0,1} & \cdots & \cdots & a_{0,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & a_{n,n} \\ 0 & ... & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En particulier, on constate que :

$$\boxed{\text{la matrice de } \varphi \text{ dans la base } \mathcal{B} \text{ est triangulaire supérieure.}}$$

En outre, comme la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure avec uniquement des 1 sur la diagonale, le réel 1 est la seule valeur propre de cette matrice, et donc de φ. Par conséquent :

$$\boxed{1 \text{ est la seule valeur propre de } \varphi.}$$

(d) Montrons que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$. Comme 0 n'est pas valeur propre de φ d'après la question précédente, l'endomorphisme φ est injectif. Mais comme $\mathbb{R}_n[x]$ est un espace vectoriel de dimension finie, il s'ensuit que φ est bijectif, et donc :

$$\boxed{\varphi \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{R}_n[x] \text{ dans } \mathbb{R}_n[x].}$$

(3) (a) Calculons $\varphi(P - P')$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[x]$. Par linéairité de la dérivation puis par télescopage, on trouve que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$:

$$\varphi(P - P') = \sum_{k=0}^{n} (P - P')^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)} - P^{(k+1)} = P^{(0)} - P^{(n+1)} = P - P^{(n+1)}.$$

Comme P appartient à $\mathbb{R}_n[x]$, il est de degré $\leq n$, ce qui entraine que $P^{(n+1)} = 0$, et donc :

$$\boxed{\varphi(P - P') = P.}$$

(b) Déterminons tout d'abord φ^{-1}. Pour ce faire, considérons l'application θ définie pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$ par $\theta(P) = P - P'$. Il est facile de vérifier que θ est linéaire et envoie tout polynôme de $\mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}_n[x]$, et donc θ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$. De plus, on sait d'après la question précédente que $\varphi \circ \theta(P) = \varphi(P - P') = P = \mathrm{Id}(P)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$, et donc $\varphi \circ \theta = \mathrm{Id}$. Par des calculs analogues à ceux de la question précédente, on vérifie aussi que $\theta \circ \varphi = \mathrm{Id}$, ce qui entraine que :

$$\boxed{\varphi^{-1} = \theta.}$$

A présent, écrivons la matrice de φ^{-1} dans la base $\mathcal{B}$. Pour ce faire, il suffit d'écrire celle de θ dans la base $\mathcal{B}$. Comme $\theta(e_0) = e_0 - (e_0)' = e_0$ et que $\theta(e_j) = e_j - (e_j)' = e_j - je_{j-1}$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on en déduit que :

$$\boxed{\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^{-1}) = \mathfrak{mat}_{\mathcal{B}}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & -n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

(c) On donne la fonction en Python suivante :

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al

def matrice(n):
    m=np.eye(n)
    for k in range(0,n-1):
        m[k,k+1]=-k-1
    b=.......
    return b
```

Complétons la cinquième ligne de cette fonction pour qu'elle affiche la matrice A de φ dans la base $\mathcal{B}$ lorsque la valeur de n est entrée par l'utilisateur. Pour ce faire, il suffit de remarquer que, d'après la question précédente, la matrice M calculée par cette fonction est la matrice de φ^{-1} dans la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire l'inverse de la matrice A. Dès lors, on complètera la fonction ci-dessus comme suit :

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al

def matrice(n):
    m=np.eye(n)
    for k in range(0,n-1):
        m[k,k+1]=-k-1
    b=al.inv(m)
    return b
```

Partie II : étude d'une autre application définie sur $\mathbb{R}_n[x]$

On désigne par x un réel quelconque.

(1) (a) Montrons que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_x^{+\infty} t^k e^{-t} dt$ converge. D'après le cours, on sait que l'intégrale $\Gamma(k+1) = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$ converge. Comme l'intégrale $\int_x^{+\infty} t^k e^{-t} dt$ en est le reste, on en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_x^{+\infty} t^k e^{-t} dt \text{ converge}}.$$

(b) Montrons que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$, l'intégrale $\int_x^{+\infty} P(t) e^{-t} dt$ converge. Pour ce faire, considérons un polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$, de la forme $P : x \longmapsto a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$. Comme l'intégrale $\int_x^{+\infty} t^k e^{-t} dt$ converge pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ d'après la question précédente, il s'ensuit par linéarité que l'intégrale $\int_x^{+\infty} (a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n) e^{-t} dt$ converge. Par conséquent, on en déduit que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$:

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_x^{+\infty} P(t) e^{-t} dt \text{ converge}}.$$

(2) (a) Donnons la valeur de $\int_x^{+\infty} e^{-t} dt$. Pour tout réel $y \geq x$, on voit que :

$$\int_x^y e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_x^y = e^{-x} - e^{-y}.$$

Comme e^{-y} tend vers 0 quand y tend vers $+\infty$, on en déduit que :

$$\boxed{\int_x^{+\infty} e^{-t} dt = \lim_{y \to +\infty} \int_x^y e^{-t} dt = e^{-x}.}$$

(b) Montrons que : $\int_x^{+\infty} t^k e^{-t}dt = e^{-x}\int_0^{+\infty}(u+x)^k e^{-u}du$. Si l'on pose $u = t - x$, alors on voit que la fonction u est strictement croissante, bijective et de classe $\mathcal{C}^1$ de $[x, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$, et de plus $du = dt$, $u = 0$ si $t = x$ et u tend vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$. Comme l'intégrale $\int_x^{+\infty} t^k e^{-t}dt$ converge d'après la question $(1)(a)$ de la partir II, on a par changement de variable que :

$$\int_x^{+\infty} t^k e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} (u+x)^k e^{-x-u}du = \int_0^{+\infty} e^{-x}(u+x)^k e^{-u}du.$$

Par linéarité de l'intégrale, on en déduit que :

$$\boxed{\int_x^{+\infty} t^k e^{-t}dt = e^{-x}\int_0^{+\infty} (u+x)^k e^{-u}du.}$$

(c) Etablissons que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $\int_x^{+\infty} t^k e^{-t}dt = k!\sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!}e^{-x}$. D'après la question précédente, on sait que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\int_x^{+\infty} t^k e^{-t}dt = e^{-x}\int_0^{+\infty} (u+x)^k e^{-u}du.$$

Comme toutes les intégrales $\int_0^{+\infty} u^i e^{-u}du$ convergent en tant que valeurs de la fonction Γ, on obtient d'après la formule du binôme et par linéarité de l'intégrale que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\int_x^{+\infty} t^k e^{-t}dt &= e^{-x}\int_0^{+\infty} \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x^i u^{k-i}e^{-u}du \\
&= e^{-x}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x^i\int_0^{+\infty} u^{k-i}e^{-u}du \\
&= e^{-x}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x^i\Gamma(k-i+1) \\
&= e^{-x}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}x^i(k-i)! \\
&= e^{-x}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!}x^i \quad = \quad k!\sum_{i=0}^{k}\frac{x^i}{i!}e^{-x}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\int_x^{+\infty} t^k e^{-t}dt = k!\sum_{i=0}^{k}\frac{x^i}{i!}e^{-x}.}$$

On considère maintenant l'application qui, à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[x]$, associe la fonction $F = \psi(P)$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$F(x) = e^x\int_x^{+\infty} P(t)e^{-t}dt.$$

(3) (a) Montrons que ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$. Pour ce faire, on peut commencer par vérifier que ψ est linéaire. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et soient P_1, P_2 des éléments de $\mathbb{R}_n[x]$. Par linéarité de l'intégrale, on trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\psi(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(x) &= e^x\int_x^{+\infty} (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(t)e^{-t}dt \\
&= e^x\int_x^{+\infty} (\lambda_1 P_1(t) + \lambda_2 P_2(t))\, e^{-t}dt \\
&= \lambda_1 e^x\int_x^{+\infty} P_1(t)e^{-t}dt + \lambda_2 e^x\int_x^{+\infty} P_2(t)e^{-t}dt \\
&= \lambda_1\psi(P_1)(x) + \lambda_2\psi(P_2)(x),
\end{aligned}$$

d'où il s'ensuit que $\psi(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = \lambda_1\psi(P_1) + \lambda_2\psi(P_2)$, et donc ψ est linéaire. Reste à montrer que ψ envoie $\mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}_n[x]$. Pour cela, considérons un polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$, de la forme P : $x \longmapsto a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$. Par linéarité de l'intégrale, on trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\psi(P)(x) = e^x \int_x^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k t^k\right) e^{-t}dt = \sum_{k=0}^n a_k e^x \int_x^{+\infty} t^k e^{-t}dt.$$

D'après le résultat de la question (2)(c) de la partie II, il s'ensuit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\psi(P)(x) = \sum_{k=0}^n a_k e^x \int_x^{+\infty} t^k e^{-t}dt = \sum_{k=0}^n a_k e^x k! \sum_{i=0}^k \frac{x^i}{i!} e^{-x} = \sum_{k=0}^n a_k k! \sum_{i=0}^k \frac{x^i}{i!},$$

d'où il s'ensuit que $\psi(P)$ est un polynôme de degré $\leq n$, et donc ψ envoie bien $\mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}_n[x]$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\psi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[x].}$$

(b) Justifions que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donnons une relation entre F, F', P. Si l'on pose $I(x) = \int_0^x P(t)e^{-t}dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors on constate que I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme primitive d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$, et de plus $I'(x) = P(x)e^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En outre, on voit d'après la relation de Chasles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = e^x \left[\int_x^0 P(t)e^{-t}dt + \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt\right] = e^x \left[-I(x) + \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt\right].$$

Comme la fonction $x \longmapsto e^x$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on obtient par produit que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus, on trouve par dérivation que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(e^x \left(-I(x) + \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt\right)\right)' \\ &= e^x \left(-I(x) + \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt\right) - e^x I'(x) \\ &= F(x) - e^x I'(x) \quad = \quad F(x) - e^x P(x)e^{-x}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit après simplification que :

$$\boxed{F' = F - P.}$$

(c) Montrons que ψ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}_n[x]$. D'après la question (4)(a) de la partie II, on sait déjà que ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$. Reste à montrer que ψ est bijectif. Comme $\mathbb{R}_n[x]$ est de dimension finie, il suffit de vérifier que ψ est injectif. Pour ce faire, considérons un élément P de $\ker(\psi)$. Par définition, on voit que $F = \psi(P) = 0$. Comme F est la fonction nulle, ceci entraine que $F' = 0$, et donc $P = 0$ vu que $F' = F - P$ d'après la question précédente. En d'autres termes, on vient de montrer que $\ker(\psi) = \{0\}$, et donc :

$$\boxed{\psi \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{R}_n[x] \text{ dans } \mathbb{R}_n[x].}$$

(4) On considère un polynôme P non nul, vecteur propre de ψ pour une valeur propre $\lambda \neq 0$.

(a) Etablissons que : $P' = \frac{\lambda-1}{\lambda}P$. Pour ce faire, on pose $F = \psi(P)$. Comme P est un vecteur propre de ψ pour une valeur propre $\lambda \neq 0$, on voit que $F = \psi(P) = \lambda P$. Par dérivation, ceci entraine que $F' = \lambda P'$. Comme $F' = F - P$ d'après la question (4)(b), ceci nous donne que :

$$F' = \lambda P' = F - P = \lambda P - P.$$

Dès lors, il s'ensuit que $\lambda P' = (\lambda - 1)P$, et donc :

$$\boxed{P' = \frac{\lambda - 1}{\lambda} P.}$$

(b) Montrons que $\lambda = 1$ est la seule valeur propre possible de ψ. Pour ce faire, on raisonne par l'absurde et on suppose que ψ admet une valeur propre $\lambda \neq 1$, et ce pour un vecteur propre P. Comme ψ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}_n[x]$ d'après la question (4)(c) de la partie II, le réel 0 n'est pas valeur propre de ψ, et donc $\lambda \neq 0$. D'après la question précédente, on voit qu'alors $P' = \frac{\lambda-1}{\lambda}P$. Comme $\frac{\lambda-1}{\lambda} \neq 0$ (car $\lambda \neq 0, 1$), les polynômes P et P' ont même degré vu qu'ils sont multiples l'un de l'autre par une constante non nulle. Mais ceci est impossible pour un polynôme non nul P, vu que dans ce cas $\deg(P') = \deg(P) - 1$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{1 est la seule valeur propre possible de } \psi.}$$

(c) Montrons enfin que $\lambda = 1$ est la seule valeur propre de ψ. D'après la question (4)(b) de la partie II, on trouve en posant $F = \psi(e_0)$ que $F' = F - e_0$. Si F était de degré $r > 0$, alors on aurait en passant aux degrés que $\deg(F') = r - 1 = \deg(F - e_0) = \deg(F) = r$, ce qui est impossible. Dès lors, F est de degré 0, ce qui entraine que $F' = 0$, et donc $F = \psi(e_0) = e_0$ car $F' = 0 = F - e_0$. Comme le polynôme e_0 n'est pas le polynôme nul, il s'ensuit que 1 est bien valeur propre de ψ. Mais comme 1 est la seule valeur propre possible de ψ d'après la question précédente, on en déduit que :

$$\boxed{\text{1 est la seule valeur propre de } \psi.}$$

(5) (a) Montrons que les endomorphismes φ et ψ sont égaux. D'après la question (3)(b) de la partie I, on sait que $\varphi^{-1} = \theta$, où $\theta : \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}_n[x]$, $P \longmapsto P - P'$. D'après la question (4)(b) de la partie II, on sait aussi que $F' = F - P$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$, où $F = \psi(P)$. Dès lors, on obtient que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$:

$$\varphi^{-1}(\psi(P)) = \psi(P) - (\psi(P))' = F - F' = P,$$

d'où il s'ensuit que $\varphi^{-1} \circ \psi = \mathrm{Id}$. En composant à gauche par φ, on en déduit que $\psi = \varphi$, et donc :

$$\boxed{\text{les endomorphismes } \varphi \text{ et } \psi \text{ sont égaux.}}$$

(b) Montrons que, si P est un polynôme de $\mathbb{R}_n[x]$ et s'il existe un réel a tel que, pour tout réel $x \geq a$, on a $P(x) \geq 0$, alors :

$$\forall x \geq a, \ \sum_{i=0}^{n} P^{(i)}(x) \geq 0.$$

Pour ce faire, considérons un tel polynôme P et un tel réel a. Comme $P(x) \geq 0$ pour tout réel $x \geq a$, on obtient par positivité de l'intégrale que, pour tout $x \geq a$:

$$\psi(P)(x) = e^x \int_x^{+\infty} P(t)e^{-t}dt \geq 0.$$

Comme les endomorphismes φ et ψ sont égaux d'après la question précédente, il s'ensuit par définition de φ que, pour tout $x \geq a$:

$$\varphi(P)(x) = \sum_{i=0}^{n} P^{(i)}(x) = \psi(P)(x) \geq 0$$

Par conséquent, on en déduit que, si P est un polynôme de $\mathbb{R}_n[x]$ et s'il existe un réel a tel que, pour tout réel $x \geq a$, on a $P(x) \geq 0$, alors :

$$\boxed{\forall x \geq a, \ \sum_{i=0}^{n} P^{(i)}(x) \geq 0.}$$