TRAVAUX DIRIGÉS : PRODUIT SCALAIRE - ESPACES EUCLIDIENS
RÉPONSES - INDICATIONS

1. FORMES BILINÉAIRES ET PRODUITS SCALAIRES

Exercice 1.

- (1) φ est bilinéaire, pas symétrique, définie, positive.
- (2) φ est bilinéaire, symétrique, pas définie, positive.
- (3) φ est bilinéaire, symétrique, définie, positive.
- (4) φ est bilinéaire, pas symétrique, pas définie, pas positive.
- (5) φ est bilinéaire, symétrique, pas définie, pas positive.
- (6) φ est bilinéaire, symétrique, définie, positive.

Exercice 2.

- (1) Vérifier que E est non vide, inclus dans $\mathbb{R}_n[x]$ et stable par combinaisons linéaires.
- (2) Commencer par faire une IPP pour montrer que $\varphi(P, Q) = \int_0^1 P'(t)Q'(t)dt$, puis passer à la démonstration.
- (3) $\|P\| = \sqrt{\int_0^1 (P'(t))^2 dt}$.

Exercice 3. Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ et aux vecteurs $x = (\sqrt{1}, \dots, \sqrt{n})$ et $y = (1, \dots, 1)$.

Exercice 4. Utiliser le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On trouve que : $(x_1, \dots, x_n) = (1, \dots, 1)$.

Exercice 5. Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz au produit scalaire $(f, g) \mapsto \int_0^1 \frac{f(t)g(t)dt}{1+t^2}$ et aux fonctions f et 1. On a alors égalité si et seulement si f est constante.

Exercice 6. Pour montrer que φ est définie, raisonner par l'absurde sur le degré de P . Le reste est classique.

Exercice 7. Montrer que $\ker(f) = \ker(g)$ par double inclusion et en utilisant l'écriture matricielle du produit scalaire en base orthonormée, puis conclure avec le théorème du rang.

Exercice 8. Refaire la démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec le polynôme :

$$P(t) = E \left(\left(t\sqrt{X} - \frac{1}{\sqrt{X}} \right)^2 \right).$$

On a alors égalité si et seulement si X est constante presque sûrement.

2. ORTHOGONALITÉ

Exercice 9.

- (1) Par polarisation, on trouve que : $\varphi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_3 + x_3y_1$.
- (2) (f_1, f_2, f_3) est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, avec $f_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right)$, $f_2 = (0, 1, 0)$, $f_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \sqrt{\frac{2}{3}} \right)$.

Exercice 10.

- (1) Ecrire $Q(x)$ comme une somme de carrés.
- (2) Poser $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 + 5x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1$. Vérifier que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$, puis que N est la norme associée à φ .
- (3) (f_1, f_2) est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$, avec $f_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$ et $f_2 = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{3} \right)$.

Exercice 11.

(1) A faire!

(2) $\left(x \mapsto 1, x \mapsto \sqrt{12} \left(x - \frac{1}{2}\right), x \mapsto \sqrt{180} \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)\right)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[x]$.**Exercice 12.** La famille $((1, 1, 1), (1, -2, 1), (1, 0, -1))$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$, mais pas une base orthonormale. De plus, la famille $((0, 1, 1), (0, -1, 1), (1, 1, 0))$ n'est même pas orthogonale.**Exercice 13.**(1) A faire en utilisant le fait qu'un polynôme de degré $\leq n$, ayant au moins $n + 1$ racines distinctes, est le polynôme nul.

(2) Classique, à savoir faire!

(3) Utiliser la question (2).

(4) On trouve que : $\text{mat}_{(L_0, \dots, L_n)}(P) = \begin{pmatrix} P(x_0) \\ P(x_1) \\ \vdots \\ P(x_n) \end{pmatrix}$.**Exercice 14.**(1) (a) Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que T_n est de degré n et de coefficient dominant $a_n = 2^{n-1}$.

(b) Effectuer une récurrence double!

(c) Utiliser la question (1)(b) pour montrer que l'ensemble S_n des racines de T_n est donné par :

$$S_n = \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \right), k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}.$$

(2) (a) A vérifier avec les formules d'addition pour $\cos$.

(b) Avec la question précédente, on trouve que :

$$I_{p,q} = \begin{cases} \pi & \text{si } p = q = 0 \\ \pi/2 & \text{si } p = q \neq 0 \\ 0 & \text{si } p \neq q \end{cases}.$$

(3) (a) Se ramener à l'aide du changement de variable $t = \cos(u)$ à l'intégrale d'une fonction continue sur un segment, puis conclure!

(b) A faire!

(c) Utiliser le changement de variable $t = \cos(u)$.(d) On trouve que : $\langle x \mapsto x^n, T_n \rangle = \frac{\pi}{2^n}$.

3. ESPACES EUCLIDIENS

Exercice 15. Si A est la matrice du produit scalaire dans une base donnée et si X est un vecteur colonne, montrer que $AX = 0 \implies X = 0$, puis conclure.**Exercice 16.**

(1) A faire!

(2) Procéder par double inclusion!

(3) Utiliser la question (2), le fait que $E = F + G$ et les résultats sur la dimensions des orthogonaux.**Exercice 17.**(1) $\mathcal{B} = ((-2, 1, 0), (0, 0, 1))$.(2) $\mathcal{B} = ((2, -3, 1))$.(3) $\mathcal{B} = ((1, -2, 1))$.(4) $\mathcal{B} = \left(x \mapsto \frac{3}{5} - \frac{11}{5}x + x^2\right)$.(5) $\mathcal{B} = \left(x \mapsto -\frac{2}{5} + x^2, x \mapsto -\frac{3}{5} + x^3\right)$.**Exercice 18.**(1) Evaluer l'égalité de départ en $x = e_i$.

- (2) On trouve que la norme est nulle.
 (3) Utiliser la question (2) pour montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de E , puis conclure avec (1).

Exercice 19.

- (1) Pour le caractère défini, utiliser le fait que $P(1) = P'(1) = P^{(2)}(1) = P^{(3)}(1) = 0 \implies 1$ est racine de P de multiplicité ≥ 4 .
 (2) On trouve que $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2) = \left(x \mapsto 1, x \mapsto x - 1, x \mapsto \frac{(x-1)^2}{2}\right)$.
 Pour la deuxième partie de la question, calculer $\varphi(P, e_0)$, $\varphi(P, e_1)$, $\varphi(P, e_2)$ et conclure.

Exercice 20.

- (1) On trouve que $\varphi(A, B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{i,j}$ si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$.
 (2) Utiliser la question (1) pour montrer que φ est un produit scalaire.
 (3) Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
 (4) Montrer par Analyse-Synthèse que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$, puis que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux avec les propriétés de la trace.

Exercice 21.

- (1) On trouve que $\langle e_i, e_j \rangle = 1$ si $i = j$ et $\langle e_i, e_j \rangle = 1/2$ si $i \neq j$.
 (2) Calculer le rang de A et montrer qu'il est égal à n , puis conclure.
 (3) Partant de la relation $\sum_{i=1}^n x_i e_i = 0$, calculer le produit scalaire de cette expression avec e_k pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, et conclure avec la question (2).

Exercice 22.

- (1) Calculer $\|v\|^2$ et montrer que $\|v\|^2 \leq \|u\|^2$. Conclure.
 (2) Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels tels que $\sum_{i=1}^n x_i e_i = 0$ (*). A l'aide de la question (1), on peut supposer que $x_1, \dots, x_n \geq 0$. Calculer alors le produit scalaire de la relation (*) avec e_{n+1} et conclure.

Exercice 23.

- (1) (a) Etablir la convergence de $\varphi(P, Q)$ en utilisant la linéarité de l'intégrale et la fonction Gamma d'Euler.
 (b) A faire!
 (2) (a) Montrer que $U(P)(t) = (1-t)P'(t) + tP''(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et en déduire que $U \in \mathcal{L}(E)$.
 (b) Vérifier par une IPP que $\langle U(P), Q \rangle = - \int_0^{+\infty} t e^{-t} P'(t) Q'(t) dt$, et conclure.
 (3) (a) Utiliser la question (2)(a) !
 (b) Calculer la matrice de U_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$. On trouve que :

$$\text{Sp}(U_n) = \{-k, k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}.$$

Conclure que U_n est diagonalisable.

- (4) (a) On trouve que : $P_k(t) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i \frac{k!}{i!} t^i$.
 (b) A l'aide de la question (4)(a), montrer que $U(P_k) = -kP_k$, puis conclure.

Exercice 24. On voit que ${}^tP = P^{-1}$. Pour l'inégalité à démontrer, il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz au produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et aux vecteurs U et PU , où U est le vecteur colonne dont toutes les composantes sont égales à 1.

4. EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

Exercice 25.

- (1) A faire!
 (2) Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux fonctions $\sqrt{f}$ et $\sqrt{g}$.

Exercice 26.

- (1) A l'aide de l'inégalité triangulaire, montrer tout d'abord que :

$$\left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k \right\| \leq \sum_{k=1}^n |\lambda_k| \|u_k\|.$$

Appliquer ensuite l'inégalité de Cauchy-Schwarz au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ et aux vecteurs $(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|)$ et $(\|u_1\|, \dots, \|u_n\|)$.

- (2) Utiliser la question (1) et raisonner par l'absurde.

Exercice 27.

- (1) (a) On trouve que $L_0 : x \mapsto 1$, $L_1 : x \mapsto x$, $L_2 : x \mapsto \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$.

(b) On trouve que L_n est de degré n , de coefficient dominant $a_n = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$.

(c) A faire avec les degrés échelonnés!

- (2) A faire!

- (3) (a) Utiliser une IPP.

(b) Procéder par une récurrence finie à l'aide de la question (3)(a).

- (4) (a) D'après la question (1)(c), on sait que $(L_0, \dots, L_{m-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{m-1}[x]$. De plus, on peut montrer à l'aide de la question (3) que L_i est orthogonal à L_m pour tout $i \leq m-1$. Conclure.

(b) Utiliser la question précédente.

Exercice 28.

- (1) On voit que $(|a| - |b|)^2 \geq 0$, et donc $2|ab| \leq a^2 + b^2$. Dès lors, on trouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n v_n| \leq \frac{1}{2}(u_n^2 + v_n^2).$$

Conclure sur la convergence de $\sum |u_n v_n|$ par linéarité et comparaison des séries à termes positifs.

- (2) Vérifier avec l'indication donnée que $l^2(\mathbb{N})$ est stable par somme et par produit par une constante.

- (3) (a) A faire!

(b) A faire! Conclure que F n'est pas de dimension finie car il contient une famille libre infinie.

(c) A faire en partant de la définition de F .

- (d) On trouve que $F^\perp = \{0\}$ et $F \oplus F^\perp = F \neq l^2(\mathbb{N})$ (car $l^2(\mathbb{N})$ contient la suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \geq 0}$ qui n'appartient pas à F). Enfin, on obtient que $(F^\perp)^\perp = l^2(\mathbb{N})$.

Exercice 29.

- (1) Suivre les indications données!

- (2) Vérifier tout d'abord que $\|y\| \leq \frac{2}{k}\|x\|$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ à l'aide de la question (1), puis faire un passage à la limite quand k tend vers $+\infty$.

- (3) Utiliser la question (2) et le théorème du rang.

- (4) (a) On trouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k(y) = y$.

(b) Suivre l'indication donnée et faire un télescopage. On trouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k(y) = 0$.

(c) Utiliser les questions (3), (4)(a) et (4)(b) pour montrer que p est le projecteur sur $\ker(u - \text{Id})$ parallèlement à $\mathfrak{Im}(u - \text{Id})$.

Exercice 30.

- (1) A donner!

- (2) On trouve que : $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$.

- (3) Par linéarité de l'espérance et par bilinéarité du produit scalaire, on trouve que :

$$E(\|U\|^2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E(X_i X_j) \langle v_i, v_j \rangle.$$

Utiliser ensuite l'indépendance mutuelle des X_i et leur loi commune pour montrer que $E(\|U\|^2) = n$.

- (4) Raisonner par l'absurde et obtenir une contradiction avec la positivité de l'espérance.

(5) Si $\mathcal{F}$ est orthogonale, alors on a d'après Pythagore :

$$\forall (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n, \quad \|\varepsilon_1 v_1 + \dots + \varepsilon_n v_n\| = \sqrt{n}.$$

Réciproquement, supposons que :

$$\forall (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n, \quad \|\varepsilon_1 v_1 + \dots + \varepsilon_n v_n\| = \sqrt{n}.$$

Posons alors $x = \varepsilon_1 v_1 + \dots + \varepsilon_n v_n$ et $y = \varepsilon_1 v_1 + \dots - \varepsilon_i v_i + \dots + \varepsilon_n v_n$. Comme $\|x\| = \|y\| = \sqrt{n}$, on voit que $\|x\|^2 = \|y\|^2$, et donc on a d'après la question (2) :

$$\left\langle v_i, \sum_{1 \leq k \leq n, k \neq i} \varepsilon_k v_k \right\rangle = 0.$$

En choisissant judicieusement les ε_k , montrer que $\langle v_i, v_k \rangle = 0$ pour tout $k \neq i$. Conclure.

(6) On raisonne par l'absurde et on suppose que $\|\varepsilon_1 v_1 + \dots + \varepsilon_n v_n\| \leq \sqrt{n}$ pour tout $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$. Alors, on obtient par croissance de l'espérance que $E(\|U\|^2) \leq n$, et donc $E(\|U\|^2) = n$ d'après la question (3). Par positivité de l'espérance, l'égalité $E(\|U\|^2) = n$ entraîne que $\|U\|^2 = n$ presque sûrement, et donc :

$$\forall (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n, \quad \|\varepsilon_1 v_1 + \dots + \varepsilon_n v_n\| = \sqrt{n}.$$

Conclure avec la question (5) que $\mathcal{F}$ est orthogonale, d'où la contradiction recherchée.