TRAVAUX DIRIGÉS : ENDOMORPHISMES ET MATRICES SYMÉTRIQUES
RÉPONSES - INDICATIONS

Exercice 1. A traiter avec le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 2. Vérifier que $\ker(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sont orthogonaux, puis conclure avec le théorème du rang.

Exercice 3.

(1) Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puis qu'il est symétrique.
(2) On trouve que $f \circ f = \mathrm{Id}$, $\mathrm{Sp}(f) = \{-1, 1\}$, $E_1(f) = S_n(\mathbb{R})$ et $E_{-1}(f) = A_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4.

(1) A faire!
(2) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$, puis qu'il est symétrique en effectuant une IPP (dériver $t \longmapsto (t^2 - 1)P'(t)$). Conclure que f est diagonalisable (d'après quel résultat?).
(3) Si $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$, on trouve que :

$$\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 6 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & n(n-1) \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}.$$

(4) On obtient que $\mathrm{Sp}(f) = \{k(k+1),\ k \in [\![0, n]\!]\}$ et f est diagonalisable.

Exercice 5.

(1) Montrer que f est un endomorphisme de E, puis qu'il est symétrique.
(2) On trouve que $\mathrm{Sp}(f) = \left\{1, 1 + \alpha\|u\|^2\right\}$, $E_1(f) = (\mathrm{Vect}(u))^{\perp}$ et $E_{1+\alpha\|u\|^2}(f) = \mathrm{Vect}(u)$. On en déduit que l'endomorphisme f est diagonalisable.
(3) On trouve que l'endomorphisme f est une isométrie si et seulement si $2 + \alpha\|u\|^2 = 0$. Sous cette condition, on obtient que $\ker(f - \mathrm{Id}_E) = (\mathrm{Vect}(u))^{\perp}$ et $\ker(f + \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(u)$, et donc f est la symétrie sur $(\mathrm{Vect}(u))^{\perp}$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(u)$.
(4) (a) Utiliser l'identité de polarisation.
(b) Calculer $\langle h(x), h(y)\rangle$ en termes matriciels, et vérifier que ${}^tX{}^tPPY = {}^tXY$ pour tous vecteurs colonnes X, Y si et seulement si ${}^tPP = I_n$.

Exercice 6. Si l'on suppose que f est une contraction, alors il suffit de calculer $\|f(x)\|$ si x est un vecteur propre de f pour la valeur propre λ, et on obtient que $|\lambda| \leq 1$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$. Réciproquement, supposons que l'endomorphisme f soit symétrique et que, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, on ait $|\lambda| \leq 1$. On se donne une base orthonormée $\mathcal{B}$ de vecteurs propres de f (laquelle existe d'après le théorème spectral). Il suffit alors de calculer $\|f(x)\|^2$ en exprimant le vecteur x dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 7.

(1) $\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}}(p) = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

(2) $\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}}(p) = \dfrac{1}{14}\begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

(3) $\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}}(p) = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(4) $\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}}(p) = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 8 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(5) $\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}}(p) = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & -4 \\ 2 & 9 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 9 & 2 \\ -4 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

(6) $\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}}(p) = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(7) $\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}}(p) = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 8. Montrer tout d'abord que $F = (\mathrm{Vect}(u))^{\perp}$, puis que $p_{F^{\perp}}(x) = \dfrac{\langle x, u\rangle u}{\|u\|^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Conclure en utilisant le fait que $p_F(x) = x - p_{F^{\perp}}(x)$ et que la distance d se calcule à l'aide de $p_F(x)$.

Exercice 9. Utiliser le théorème sur la projection orthogonale pour justifier l'existence de ce minimum. De plus, on trouve après calculs que :

$$\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (t^3 - at - b)^2 e^{-t} dt = 360,$$

et que le projeté orthogonal de $x \longmapsto x^3$ sur $\mathrm{Vect}(x \longmapsto 1, x \longmapsto x)$ est le polynôme $P_0 : x \longmapsto 18x - 12$.

Exercice 10. Utiliser le théorème sur la projection orthogonale pour justifier l'existence de la distance d. De plus, on trouve après calculs que $d = 6$ et $p_{\mathbb{R}_2[x]}(x \longmapsto x^3) = (x \longmapsto 3x^2 - 3x + 1)$.

Exercice 11. Montrer tout d'abord que les seules valeurs propres possibles de A sont $-1, 1$. Conclure alors que $A^2 = I_n$ en utilisant le théorème spectral. Si maintenant $A^p = 0$, on montre de même que $A = 0$.

Exercice 12. Comme $A{}^tA = {}^tAA$, montrer que $M^p = {}^t(A^p)(A^p) = 0$. On peut alors vérifier que M est symétrique et conclure avec l'exercice 11. Enfin, il suffit de calculer ${}^tX{}^tAAX$ pour tout vecteur colonne X, afin d'obtenir que $A = 0$.

Exercice 13.

(1) Citer le théorème spectral.

(2) On a : $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 3, 6\}$, $E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$, $E_6(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$.

Une base orthonormale de vecteurs propres de A est donnée par :

$$\mathcal{B} = \left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right).$$

(3) On trouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = \frac{6^n - 2(3^n)}{18}A^2 + \frac{4(3^n) - 6^n}{6}A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4(3^n) + 6^n & -2(3^n) - 2(6^n) & -4(3^n) + 2(6^n) \\ -2(3^n) - 2(6^n) & (3^n) + 4(6^n) & 2(3^n) - 4(6^n) \\ -4(3^n) + 2(6^n) & 2(3^n) - 4(6^n) & 4(3^n) + 4(6^n) \end{pmatrix}.$$

Exercice 14. La matrice A est diagonalisable en base orthonormée d'après le théorème spectral. De plus, on trouve que $A = PDP^{-1}$, où P et D sont les matrices orthogonale et diagonale suivantes :

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 15.

(1) q est positive sur $\mathbb{R}^2$, (2) q change de signe sur $\mathbb{R}^2$, (3) q change de signe sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 16.

(1) On trouve que ${}^tXGX = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right\|^2$.
(2) Utiliser la question (1) et la symétrie du produit scalaire.
(3) Ecrire X dans une base orthonormée de vecteurs propres de G et faire les calculs, puis la minoration.
(4) Utiliser les questions (1) et (3).

Exercice 17. En utilisant une base orthonormée de vecteurs propres de f, montrer que α et $-\alpha$ sont les seules valeurs propres possibles de f. En déduire que α^2 est la seule valeur propre de f, et conclure.

Exercice 18.

(1) Vérifier par le calcul que : ${}^tXAX = \sum_{i=1}^{n}(a_{i,i}-1)x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$. Conclure.
(2) La matrice A est diagonalisable d'après le théorème spectral. De plus, elle est inversible car ses valeurs propres sont > 0, et donc 0 n'appartient pas à $\mathrm{Sp}(A)$.

Exercice 19.

(1) On trouve que $\mathrm{rg}(M) = 2$ et $\ker(f) = \mathrm{Vect}(A, B)^{\perp}$.
(2) Montrer que f est symétrique.
(3) (a) Montrer que f envoie E_1 dans E_1.
 (b) On trouve que : $\mathfrak{mat}_{(A,B)}(\varphi) = \begin{pmatrix} \langle A, B\rangle & \|B\|^2 \\ \|A\|^2 & \langle A, B\rangle \end{pmatrix}$.
 (c) On trouve que : $\mathrm{Sp}(\varphi) = \{\langle A, B\rangle - \|A\|.\|B\|, \langle A, B\rangle + \|A\|.\|B\|\}$.
 (d) L'endomorphisme φ est symétrique par restriction, et donc il est diagonalisable.
 (e) On en déduit que : $\mathrm{Sp}(f) = \{0, \langle A, B\rangle - \|A\|.\|B\|, \langle A, B\rangle + \|A\|.\|B\|\}$.

Exercice 20.

(1) A faire!
(2) Supposons que A soit positive. On écrit alors que $A = PDP^{-1}$, où P est orthogonale et D est une matrice diagonale, de coefficients diagonaux $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Si l'on pose $B = P\Delta P^{-1}$, où Δ est la matrice diagonale, de coefficients diagonaux $\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n}$, alors il reste à vérifier que ${}^tBB = A$.
Pour la réciproque, calculer ${}^tX{}^tBBX$ et conclure.
(3) Procéder comme à la question (2) et vérifier que la matrice B est symétrique.
(4) Supposons que A soit symétrique positive inversible. On commence par établir que toutes les valeurs propres de A sont > 0. Il reste à vérifier que, si $A = S^2$, alors on a $A^{-1} = \left(S^{-1}\right)^2$ et on conclut.

1. Exercices supplémentaires

Exercice 21.

(1) Utiliser le théorème spectral!
(2) On a : $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 7\}$. De plus, des bases orthonormées respectives $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}_7$ de $E_0(A)$ et $E_7(A)$ sont données par :

$$\mathcal{B}_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_7 = \left(\frac{1}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

(3) Avec la question (2), on trouve que :

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{7} & -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{42} \\ 2/\sqrt{7} & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & 2/\sqrt{42} \\ -1/\sqrt{7} & 0 & 5/\sqrt{30} & -1/\sqrt{42} \\ -1/\sqrt{7} & 0 & 0 & 6/\sqrt{42} \end{pmatrix}.$$

(4) Procéder comme aux questions précédentes. On trouve que $\mathrm{Sp}(B) = \{0, 2\}$. De plus, des bases orthonormées respectives $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}_2$ de $E_0(B)$ et $E_2(B)$ sont données par :

$$\mathcal{B}_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Enfin, on trouve avec ce qui précède que :

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 22.

(1) Exprimer $\mathrm{Tr}({}^tAA)$ en fonction des $a_{i,j}$ par un calcul direct, puis utiliser le théorème spectral pour calculer $\mathrm{Tr}({}^tAA)$ en fonction des λ_k.
(2) Calculer la trace de p en utilisant une base adaptée à la décomposition $E = \mathfrak{Im}(p) \oplus \ker(p)$.
(3) Appliquer les résultats des questions (1) et (2) à la matrice A de l'endomorphisme p dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 23.

(1) Il suffit de montrer que cette intégrale converge absolument. Pour ce faire, on utilise le changement de variable $u = 1 + t$, puis on effectue une comparaison par rapport à une intégrale de la forme $\displaystyle\int_0^2 \frac{M}{\sqrt{u}}du$.
(2) A faire!
(3) (a) Vérifier que φ est linéaire et que $\deg(\varphi(P)) \leq \deg(P)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$.
(b) L'endomorphisme φ n'est pas inversible (calculer $\varphi(x \longmapsto 1)$).
(c) Calculer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ et en déduire le spectre de φ.
(d) Procéder par IPP!
(e) Vérifier que φ est symétrique, et conclure.

Exercice 24.

(1) (a) Penser à la fonction Gamma d'Euler. On rappelle que $\Gamma(k + 1) = k!$.
(b) Utiliser la question précédente et la linéarité de l'intégrale.
(c) A faire!
(d) On trouve que $\varphi(x \longmapsto x^p, x \longmapsto x^q) = (p + q)!$ et $\|x \longmapsto x^p\| = \sqrt{(2p)!}$.
(e) Une base orthonormée $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}_2[x]$ pour ce produit scalaire est donnée par :

$$\mathcal{B}_2 = \left(x \longmapsto 1, x \longmapsto x - 1, x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{5}}\left(x^2 - 4x + 3\right)\right).$$

(2) (a) Vérifier que f est linéaire et que $\deg(f(P)) \leq \deg(P)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$.
(b) Si $\mathcal{B}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$, on trouve que ;

$$\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n^2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -n \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que f admet $n + 1$ valeurs propres distinctes, et que tous ses sous-espaces propres sont de dimension 1. Conclure.
(c) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on trouve que $\varphi'(t) = f(P)(t)e^{-t}$.
(d) Procéder par IPP avec la question $(2)(c)$.
(e) Utiliser le fait que les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont deux à deux orthogonaux.

Exercice 25. Si d est la distance de M à $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$, on trouve que $d = 1$.

Exercice 26. Calculer $\langle f(x), x\rangle$ en exprimant le vecteur x dans une base orthonormée de vecteurs propres de f, puis conclure.

Exercice 27.

(1) Procéder comme à l'exercice 20.
(2) Soit $\mathcal{B} = (X_1, ..., X_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de A, pour les valeurs propres respectives $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Vérifier que $\mathcal{B}$ est aussi une base orthonormée de vecteurs propres de A^{-1}, pour les valeurs propres respectives $1/\lambda_1, ..., 1/\lambda_n$. Conclure.

(3) Exprimer X dans une base orthonormée $\mathcal{B} = (X_1, ..., X_n)$ de vecteurs propres de A (pour les valeurs propres respectives $\lambda_1, ..., \lambda_n$), sous la forme :

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i X_i.$$

Montrer ensuite que ${}^t X A X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$ et ${}^t X A^{-1} X = \sum_{i=1}^{n} x_i^2/\lambda_i$, puis utiliser Cauchy-Schwarz.

(4) (a) Si $y_1, ..., y_n$ sont les composantes de $Y = {}^t P X$, montrer comme à la question (3) que :

$${}^t X A X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \quad \text{et} \quad {}^t X A^{-1} X = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{\lambda_i}.$$

On conclut alors par produit et par définition de κ_A.

(b) Vérifier tout d'abord que $(a+b)^2 \geq 4ab$ pour tous réels a, b. Pour conclure, appliquer ensuite ce résultat aux réels :

$$a = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_n} y_i^2 \quad \text{et} \quad b = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_1}{\lambda_i} y_i^2.$$

(c) La fonction f est décroissante sur $[\lambda_1, \sqrt{\lambda_1 \lambda_n}]$ et croissante sur $[\sqrt{\lambda_1 \lambda_n}, \lambda_n]$.

(d) D'après la question précédente, la fonction f admet un minimum en $\sqrt{\lambda_1 \lambda_n}$, qui vaut $2\sqrt{\lambda_1/\lambda_n} > 0$. De plus, on trouve que $f(\lambda_1) = f(\lambda_n) = 1 + 1/\kappa_A^2$. Dès lors, il s'ensuit que $f(t) \leq 1 + 1/\kappa_A^2$ pour tout $t \in [\lambda_1, \lambda_n]$. Il reste à appliquer ce résultat à celui de la question $(4)(b)$ et on conclut.

Exercice 28.

(1) (a) Vérifier que ${}^t A = A$ et conclure avec le théorème spectral. Calculer ensuite ${}^t X A X$ pour tout vecteur colonne X, et vérifier que les valeurs propres de A sont toutes ≥ 0. Utiliser enfin le fait que M soit inversible pour établir que A l'est aussi, et donc ses valeurs propres sont toutes > 0.

(b) Utiliser la question précédente et le théorème spectral.

(c) Procéder comme à l'exercice 20.

(d) Calculer ${}^t T T$.

(2) (a) Calculer $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}({}^t M M)$ à l'aide des coefficients de M, puis conclure.

(b) Développer h sous la forme d'un polynôme de degré 2, puis reproduire la démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz en utilisant au passage le résultat de la question $(2)(a)$.

(c) On a égalité dans l'inégalité de la question $(2)(b)$ si et seulement si M est un multiple de I_n.