Programme de colles en Mathématiques
ECG 2 (semaine 17 : 3 février 2025)

La colle débutera soit par une démonstration d'un résultat de cours (indiqué par un astérisque), soit par un exercice de début de colle. Le programme portera sur les endomorphismes et matrices symétriques, ainsi que sur les variables à densité, et plus particulièrement sur les points suivants:

(1) **Endomorphismes et matrices symétriques:**
Définition et propriétés d'un endomorphisme symétrique f d'un espace euclidien E.
Définition et propriétés d'une matrice symétrique (réelle) A de taille n.
"L'ensemble des endomorphismes symétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$".
"Si un sous-espace F est stable par f, son orthogonal est stable par f" **(*)**.
"Toute famille de vecteurs propres de f pour des valeurs propres $\neq$ est orthogonale" **(*)**.
"Les sous-espaces propres de f (resp. A) sont 2 à 2 orthogonaux".
Définition et propriétés du projecteur orthogonal sur un sous-espace vectoriel F de E.
Expression du projecteur orthogonal de x sur F à l'aide du produit scalaire et d'une base orthonormée de F **(*)**.
"Un projecteur est orthogonal si et seulement s'il est symétrique".
"Le projeté orthogonal de x sur F est l'unique vecteur qui minimise la distance de x à F".
Problème des moindres carrés (pour les matrices colonnes).
Réduction des endomorphismes et matrices symétriques - Théorème spectral.
Définition d'une forme quadratique q sur $\mathbb{R}^n$ à l'aide d'une matrice symétrique A.
Expression d'une forme quadratique q à l'aide de l'endomorphisme symétrique f associé.
Expression d'une forme quadratique q dans une base de vecteurs propres de f.
Détermination du signe de q en fonction du signe des valeurs propres de f.

(2) **Variables aléatoires à densité :**
Définition et propriétés des variables aléatoires.
"La somme, le produit, le minimum et le maximum d'un nombre fini de variables aléatoires est une variable aléatoire".
Définition et propriétés de la fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire X.
Définition et propriétés d'un couple de variables aléatoires et de sa loi conjointe.
Définition et propriétés de l'indépendance de deux variables aléatoires.
Définition et propriétés d'un vecteur aléatoire et de sa loi conjointe.
Définition et propriétés de l'indépendance mutuelle de n variables aléatoires.
Lemme des coalitions - Suite de variables aléatoires indépendantes.
Définition d'une densité de probabilité, d'une variable à densité X et d'une densité de X.
"Si X est une variable à densité, alors $P([X = x]) = 0$ pour tout réel x".
Expression intégrale de $F_X(x)$ et de $P([a \leq X \leq b])$ à l'aide d'une densité de X.
"f est une densité d'une variable aléatoire X ssi f est une densité de probabilité".
Détermination de la loi d'une fonction $\varphi(X)$ d'une variable à densité X.
Définition de l'espérance et des moments (sous réserve d'existence) d'une variable à densité.
Propriétés de l'espérance : transfert, existence par domination, linéarité, positivité, croissance.
Définition (sous réserve d'existence) de la variance et de l'écart-type de X.
"La variance d'une variable à densité X est toujours > 0".
Formule de Koenig-Huygens et formule "$V(aX + b) = a^2V(X)$".
Définition d'une variable à densité centrée, et d'une variable à densité centrée réduite.
Densité d'une somme de 2 variables aléatoires indépendantes à densité - Produit de convolution.
"Si X, Y sont indépendantes, à densité et ont une espérance, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$".
"Si X, Y sont indépendantes, à densité et ont une variance, alors $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$".
Généralisation au cas de n variables aléatoires indépendantes à densité.

Exercices de début de colle:

Exercice 1. Pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[x])^2$, on pose $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$, et on considère l'application f définie pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$ par : $f(P) : x \longmapsto 2xP'(x) + (x^2 - 1)P''(x)$.

(1) Montrer que $\langle \, , \, \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.
(2) Montrer que f est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}_n[x]$. Qu'en déduit-on sur f?
(3) Calculer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.
(4) En déduire le spectre de f, et retrouver le résultat de la question (2).

Exercice 2. Déterminer la matrice dans la base canonique de E de la projection orthogonale sur F, et ce dans l'un des cas suivants :

(1) $E = \mathbb{R}^3$ (muni du produit scalaire canonique) et $F = \text{Vect}((1,2,1),(1,1,0))$.

(2) $E = \mathbb{R}_2[x]$ (muni du produit scalaire $(P,Q) \longmapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$) et $F = \text{Vect}(x \longmapsto x, x \longmapsto x^2)$.

Exercice 3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

(1) Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à densité.

(2) Donner une densité de X, puis montrer que X admet des moments de tous ordres.

(3) Calculer l'espérance de X.

Exercice 4. Soit f la fonction définie par $f(t) = 0$ si $t < 0$ et $f(t) = te^{-\frac{t^2}{2}}$ si $t \geq 0$.

(1) Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire X, et donner sa fonction de répartition.

(2) Justifier que X admet des moments de tous ordres, et calculer l'espérance de X.

(3) Déterminer la loi de $Y = X^2$.