Lycée Clemenceau **2024-25**
ECG 2

Devoir Maison de Mathématiques $n^o 6$:
Vecteurs aléatoires - Algèbre bilinéaire

Exercice 1. Soit $p \in]0,1[$ et soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de même loi définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$P([X_n = -1]) = p \quad \text{et} \quad P([X_n = 1]) = 1 - p.$$

On considère la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\geq 1}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $Z_n = \prod_{i=1}^n X_i$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = P([Z_n = -1])$ et $b_n = P([Z_n = 1])$.

(1) (a) Donner la loi de $Y_n = \frac{1+X_n}{2}$, puis justifier que les variables aléatoires $Y_1, ..., Y_n$ sont indépendantes.

(b) Ecrire une fonction en Python qui, étant donnés deux entiers $n, m \geq 1$ et un réel $p \in]0,1[$, calcule et affiche m simulations de la variable aléatoire Z_n, ainsi que leur moyenne et leur variance.

(c) Soit N une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$ et indépendante des X_i. Ecrire une fonction en Python qui, étant donné un réel $p \in]0,1[$, calcule et affiche une simulation de la variable aléatoire :

$$T = \sum_{j=1}^{N} X_j.$$

(d) En déduire une fonction en Python qui, étant donnés un entier $m \geq 20$ et un réel $p \in]0,1[$, réalise et affiche m simulations de la variable aléatoire T, puis en affiche l'histogramme pour 10 classes de même amplitude.

(2) (a) Calculer $a_n + b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \text{où :} \quad Q = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}.$$

(3) (a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, il existe un réel $p_n \in]0,1[$ tel que :

$$Q^n = \begin{pmatrix} 1-p_n & p_n \\ p_n & 1-p_n \end{pmatrix},$$

et donner une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.

(b) En déduire l'expression de p_n en fonction de n, p.

(c) Calculer l'espérance de Z_n en fonction de n, p.

(d) Calculer la covariance de (Z_n, Z_{n+1}) en fonction de n, p.

(e) Calculer les limites des suites $(p_n)_{n\geq 1}$ et $(E(Z_n))_{n\geq 1}$.

(4) (a) Déterminer une CNS (condition nécessaire et suffisante) pour que Z_1 et Z_2 soient indépendantes.

(b) On suppose cette condition vérifiée. Quelle est alors la loi de Z_n ?

(c) On suppose toujours cette condition vérifiée. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n, \quad P([Z_1 = \varepsilon_1] \cap ... \cap [Z_n = \varepsilon_n]) = \frac{1}{2^n}$$

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$, muni d'un produit scalaire noté $\langle\ ,\ \rangle$. Pour tout vecteur non nul $u \in E$, on désigne par φ_u l'application de E dans E, définie pour tout $x \in E$ par :

$$\varphi_u(x) = 2\frac{\langle x, u\rangle}{\langle u, u\rangle} u - x.$$

(1) Montrer que φ_u est un endomorphisme involutif de E, c'est-à-dire tel que $\varphi_u \circ \varphi_u = \mathrm{Id}_E$.

(2) Montrer que u est un vecteur propre de φ_u pour une valeur propre que l'on déterminera.

(3) Etablir que φ_u conserve le produit scalaire, c'est-à-dire : $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle \varphi_u(x), \varphi_u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.

(4) En déduire que φ_u conserve la norme, c'est-à-dire : $\forall x \in E$, $\|\varphi_u(x)\| = \|x\|$.

(5) Soit $\mathcal{D}_u$ la droite vectorielle engendrée par u, et soit $\mathcal{H}_u$ l'orthogonal de $\mathcal{D}_u$ dans E.

(a) Montrer que $\mathcal{H}_u$ est le sous-espace propre de φ_u associé à la valeur propre -1.

(b) L'endomorphisme φ_u est-il diagonalisable ? Justifier.

(c) Pour tout réel $t \neq 0$, comparer les applications φ_{tu} et φ_u.

Problème 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[x]$ des polynômes réels de degré $\leq n$, muni de la base canonique $\mathcal{B} = (x \longmapsto 1, x \longmapsto x, ..., x \longmapsto x^n)$. On rappelle qu'un polynôme est dit *unitaire* si le coefficient de son monôme de plus haut degré est égal à 1. De plus, on désigne par φ l'application qui, à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[x]$, associe le polynôme $\varphi(P) : x \longmapsto (x-1)P'(x) - xP''(x)$.

Partie I : étude de l'application φ.

(1) (a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
(b) Calculer $\varphi(x \longmapsto x^j)$ pour tout $j \in [\![0, n]\!]$.
(c) Ecrire la matrice M de l'endomorphisme φ dans la base $\mathcal{B}$.
(d) En déduire que l'endomorphisme φ est diagonalisable.

(2) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on désigne par L_k l'unique polynôme unitaire tel que $\varphi(L_k) = kL_k$, que l'on écrit sous la forme $L_k : x \longmapsto \sum_{i=0}^{p} a_i x^i$, avec $a_p = 1$.
(a) Montrer que $p = k$, c'est-à-dire que L_k est de degré k.
(b) Déterminer le polynôme L_0.
(c) Pour tout $k \geq 1$, écrire le système d'équations dont $a_0, ..., a_{k-1}$ sont solutions.
(d) En déduire que, pour tout $i \in [\![0, k]\!]$, on a : $a_i = (-1)^{k-i}(k-i)!(\binom{k}{i})^2$.

(3) On pose $f_k(x) = x^k e^{-x}$. Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$L_k(x) = (-1)^k e^x f_k^{(k)}(x).$$

Partie II : étude d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.

(1) Pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[x]^2$, on pose : $\psi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$.
(a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt$ converge.
(b) Vérifier que l'intégrale $\psi(P, Q)$ est convergente.
(c) Montrer que ψ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.

(2) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. A l'aide de l'intégration par parties, montrer que, pour tout $(f, g) \in \mathcal{C}^k([a, b], \mathbb{R})^2$:

$$\int_a^b f(t)g^{(k)}(t)dt = \left[\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j f^{(j)}(t)g^{(k-j-1)}(t)\right]_a^b + (-1)^k \int_a^b f^{(k)}(t)g(t)dt.$$

(3) Montrer que, pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$, on a : $f_k^{(i)}(0) = 0$.

(4) (a) Montrer que, pour tout $(i, k) \in \mathbb{N}^2$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_0^x L_i(t)f_k^{(k)}(t)dt = \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j L_i^{(j)}(x)f_k^{(k-j-1)}(x) + (-1)^k \int_0^x L_i^{(k)}(t)f_k(t)dt.$$

(b) En déduire que, pour tout $(i, k) \in \mathbb{N}^2$, on a : $\int_0^{+\infty} L_i(t)L_k(t)e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} L_i^{(k)}(t)f_k(t)dt$.
(c) Montrer que la famille $(L_0, ..., L_n)$ est orthogonale pour le produit scalaire ψ.
(d) Montrer que $I_{k+1} = (k+1)I_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis donner la valeur de I_k en fonction de k.
(e) En déduire la norme de L_k pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, puis donner une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[x]$.

Partie III : étude des racines de L_n.

On rappelle que n est un entier ≥ 1. On pose $R : x \longmapsto \prod_{j=1}^{p}(x - x_j)$, où $x_1, ..., x_p$ sont les racines positives, distinctes, d'ordre de multiplicité impair de L_n. On convient que $R : x \longmapsto 1$ si L_n n'a pas de racine d'ordre de multiplicité impair dans $\mathbb{R}_+$.

(1) Montrer que le polynôme RL_n est positif sur $\mathbb{R}_+$.

(2) Dans cette question, on suppose que $p < n$.
(a) En remarquant que R est un élément de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$, montrer que $\psi(R, L_n) = 0$.
(b) En déduire que RL_n est le polynôme nul.

(3) (a) A l'aide de la question (2)(b), conclure que $p = n$.
(b) En déduire que L_n admet n racines (réelles) distinctes et toutes positives.