TRAVAUX DIRIGÉS : RECHERCHE D'EXTREMA
RÉPONSES - INDICATIONS

1. Recherche d'extrema

Exercice 1.

(1) A faire! Pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on trouve que :

$$\begin{cases} \nabla(f)(x,y) = \left(2x - \dfrac{1}{(x+y)^2}, 2y - \dfrac{1}{(x+y)^2}\right) \\ \\ \nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2+\frac{2}{(x+y)^3} & \frac{2}{(x+y)^3} \\ \frac{2}{(x+y)^3} & 2+\frac{2}{(x+y)^3} \end{pmatrix} \end{cases}.$$

(2) Montrer que $A = (1/2, 1/2)$ est l'unique point critique de f. Calculer ensuite les valeurs propres de $\nabla^2(f)(A)$ et conclure.
(3) Exprimer $q_{(x,y)}(h_1,h_2)$ sous forme d'une somme de carrés et conclure.

Exercice 2.

(1) A faire! Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on trouve que :

$$\begin{cases} \nabla(f)(x,y) = \left(2x+2y+y^3, 2x+2y+3xy^2\right) \\ \\ \nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 2+3y^2 \\ 2+3y^2 & 2+6xy \end{pmatrix} \\ \\ q_{(x,y)}(h_1,h_2) = 2h_1^2 + 2(2+3y^2)h_1h_2 + (2+6xy)h_2^2 \end{cases}.$$

(2) On trouve que $\mathcal{C} = \{(0,0)\}$.
(3) Vérifier que $\nabla^2(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Sp}(\nabla^2(f)(0,0)) = \{0,4\}$.
(4) Vérifier que $f(x,0) = x^2 \geq 0$ et $f(x,-x) = -x^4 \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire que f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$.

Exercice 3.

(1) A faire!
(2) Etudier la fonction $z \longmapsto ze^z$ sur $\mathbb{R}$.
(3) Vérifier que $\mathcal{C} = \{(a,b)\}$ avec $a = b$, $a = \sqrt{\dfrac{z_0}{2}}$ et $z_0e^{z_0} = 1$.
(4) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on trouve que :

$$\begin{cases} \nabla(f)(x,y) = \left(2xe^{x^2+y^2} - \frac{1}{x}, 2ye^{x^2+y^2} - \frac{1}{y}\right) \\ \\ \nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} (2+4x^2)e^{x^2+y^2} + \frac{1}{x^2} & 4xye^{x^2+y^2} \\ 4xye^{x^2+y^2} & (2+4y^2)e^{x^2+y^2} + \frac{1}{y^2} \end{pmatrix} \\ \\ q_{(x,y)}(h_1,h_2) = \left((2+4x^2)e^{x^2+y^2} + \dfrac{1}{x^2}\right)h_1^2 + 8xye^{x^2+y^2}h_1h_2 + \left((2+4y^2)e^{x^2+y^2} + \dfrac{1}{y^2}\right)h_2^2 \end{cases}.$$

(5) Exprimer $q_{(x,y)}(u,v)$ comme somme de carrés, et en déduire que $q_{(x,y)}(u,v) \geq 0$ pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}$ et tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.
(6) Montrer à l'aide de la question précédente que f admet un minimum global en A.

Exercice 4.

(1) A faire! Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on trouve que :

$$\begin{cases} \nabla(f)(x,y) = \big(2x(1+y)^3, 3x^2(1+y)^2 + 14y\big) \\ \\ \nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2(1+y)^3 & 6x(1+y)^2 \\ 6x(1+y)^2 & 14+6x^2(1+y) \end{pmatrix} \end{cases}.$$

(2) Vérifier que $\mathcal{C} = \{(0,0)\}$, et donc $A = (0,0)$.
(3) Utiliser la hessienne en $(0,0)$ pour conclure!
(4) Montrer que $f(1,y)$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) quand y tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$). En déduire que f n'admet pas de minimum global.

Exercice 5.

(1) A faire!
(2) Pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on trouve que :

$$\begin{cases} \nabla(f)(x,y) = \left(\ln(y) - \frac{y}{x}, \frac{x}{y} - \ln(x)\right) \\ \\ \nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{y}{x^2} & \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \\ \frac{1}{y} - \frac{1}{x} & -\frac{x}{y^2} \end{pmatrix} \end{cases}.$$

(3) Montrer que (e,e) est l'unique point critique de f, et que c'est un point-selle. Conclure.

Exercice 6.

(1) A faire!
(2) Pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, on trouve que :

$$\nabla(f)(x) = \left(\exp\left(n+1-\sum_{k=1}^{n} x_k\right) + e^{x_1}, ..., \exp\left(n+1-\sum_{k=1}^{n} x_k\right) + e^{x_n}\right).$$

(3) Montrer que $\widehat{x} = (1, ..., 1)$ est l'unique point critique de f.
(4) (a) Après calculs, on trouve que :

$$\nabla^2(f)(\widehat{x}) = \begin{pmatrix} 2e & e & \cdots & e \\ e & 2e & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & e \\ e & \cdots & e & 2e \end{pmatrix}.$$

(b) Si $x_1, ..., x_n$ sont les composantes du vecteur colonne X, vérifier que :

$${}^tX\nabla^2(f)(\widehat{x})X = e\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2\right).$$

Conclure avec cette égalité!
(c) A faire avec la question précédente.
(d) Calculer ${}^tX\nabla^2(f)(x)X$ et conclure comme à l'exo 1, question (3). La fonction f admet bien un minimum global au point $\widehat{x}$.

Exercice 7. Montrer que, pour tout $x \in E$, on a :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{p} \|x - u_k\|^2 = p\left\|x - \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} u_k\right\|^2 - \frac{1}{p}\left\|\sum_{k=1}^{p} u_k\right\|^2 + \sum_{k=1}^{p} \|u_k\|^2.$$

En déduire que f admet un minimum global atteint au point $x_0 = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} u_k$ et valant :

$$f(x_0) = -\frac{1}{p}\left\|\sum_{k=1}^{p} u_k\right\|^2 + \sum_{k=1}^{p} \|u_k\|^2.$$

2. Recherche d'extrema sous contraintes

Exercice 8.

(1) Si $\mathcal{C}_0$ est l'ensemble des points critiques sous contrainte, vérifier que $\mathcal{C}_0 = \left\{\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right)\right\}$.
(2) Utiliser la convexité de la fonction $t \longmapsto t^4$.
(3) Sous la contrainte $\mathcal{C}$, on obtient avec la question (2) que $f(x, y, z, t) \geq x^4 + (1-x)^4 + 2y^4 \geq \frac{1}{8}$ avec égalité si $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$, $z = \frac{1}{2}$, $t = 0$. On peut alors conclure!

Exercice 9.

(1) On trouve que $\mathcal{C} = \emptyset$.
(2) Pas d'extremum local/global.
(3) On trouve que $A = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.
(4) On obtient que $q_{(x,y,z)}(u, v, w) = \frac{2u^2}{x^3} + \frac{2v^2}{y^3} + \frac{2w^2}{z^3} \geq 0$.
(5) Conclure comme à l'exo 1, question (3).

Exercice 10.

(1) Vérifier que Γ est fermé borné, que f est continue sur $\mathbb{R}^n$ et conclure quant à l'existence du maximum. Etablir ensuite que ce maximum est non nul.
(2) Si $\mathcal{C}_0$ est l'ensemble des points critiques sous contrainte, vérifier que $\mathcal{C}_0 = \left\{\left(\frac{s}{n}, ..., \frac{s}{n}\right)\right\}$.
(3) On trouve que $M = \left(\frac{s}{n}\right)^n$, conclure avec ça!

Exercice 11.

(1) A faire!
(2) Si $\mathcal{C}_0$ est l'ensemble des points critiques sous contrainte, vérifier que $\mathcal{C}_0 = \{(r, ..., r)\}$.
(3) On trouve que, pour tout $(x_1, ..., x_n) \in]0, +\infty[^n$:

$$\nabla^2(h)(x_1, ..., x_n) = \begin{pmatrix} -1/x_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1/x_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1/x_n^2 \end{pmatrix}.$$

(4) A faire! On trouve que ce maximum vaut $f(r, ..., r) = n \ln(r)$.

Exercice 12.

(1) A faire!
(2) On trouve que $\nabla(f)(x, y) = \left(2x + y - \frac{1}{x^2}, 2y + x - \frac{1}{y^2}\right)$ pour tout $(x, y) \in U$.
(3) (a) Utiliser la relation $\nabla(f)(x, y) = (0, 0)$, puis effectuer des opérations élémentaires sur les lignes du système obtenu.
  (b) Utiliser le théorème de la bijection.
  (c) On trouve que $M = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$.
(4) (a) Par des calculs simples, on obtient que :

$$\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2 + 2/x^3 & 1 \\ 1 & 2 + 2/y^3 \end{pmatrix}.$$

  Ecrire $q_{x,y}(u, v)$ comme une somme de carrés et conclure.
  (b) La fonction f admet un minimum global sur U, atteint au point M.
(5) Dans cette question, on veut étudier les extrema de f sur U sous la contrainte $\mathcal{C} : x - y = -1$.

(a) Si $\mathcal{C}_0$ est l'ensemble des points critiques sous contrainte, vérifier que :

$$(x,y)\in\mathcal{C}_0 \iff \left\{\begin{array}{l} x-y=-1 \\ \exists\lambda\in\mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} 2x+y-\frac{1}{x^2} &=& \lambda \\ x+2y-\frac{1}{y^2} &=& -\lambda \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x-y=-1 \\ 3x+3y-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}=0 \end{array}\right. .$$

(b) Etudier la fonction $h : x \longmapsto 3x+3(x+1)-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{(x+1)^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et montrer qu'elle est bijective. En déduire que, si x_0 est l'unique antécédent de 0 par h, alors (x_0,x_0+1) est l'unique point critique sous contrainte de f. Conclure avec la question $(4)(a)$ que la fonction f admet un maximum global en (x_0,x_0+1) sous la contrainte $\mathcal{C}$.

3. Exercices supplémentaires

Exercice 13.

(1) On trouve que $\mathcal{C}=\left\{\left(2,\dfrac{1}{4}\right),\left(2,\dfrac{1}{4}\right)\right\}$, les deux points critiques sont des points selles et il n'y a pas d'extremum local.
(2) On trouve que $\mathcal{C}=\left\{\left(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{2}\right)\right\}$, le point critique correspond à un minimum local.
(3) On trouve que $\mathcal{C}=\left\{(0,0),(1,0),(0,1),\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)\right\}$, les trois premiers points critiques sont des points selles, le quatrième correspond à un minimum local.
(4) On trouve que $\mathcal{C}=\left\{(0,0),(1,0),(0,1),\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)\right\}$, les trois premiers points critiques sont des points selles, le quatrième correspond à un maximum local.
(5) On trouve que $\mathcal{C}=\left\{(1,0),(e^{-2},0)\right\}$, le premier point critique correspond à un minimum local et le second est un point selle.
(6) On trouve que $\mathcal{C}=\{(-1,-1)\}$ et le point critique est un point selle.

Exercice 14.

(1) On trouve que $\mathcal{C}=\{(0,0,0),(1,1,1),(-1,-1,1),(1,-1,-1),(-1,1,-1)\}$ et tous les points critiques sont des points selles.
(2) On trouve que $\mathcal{C}=\{(-1,0,0)\}$ et le point critique correspond à un minimum local.
(3) On trouve que $\mathcal{C}=\{(1,1,-1)\}$ et le point critique est un point selle.
(4) On trouve que $\mathcal{C}=\{(0,0,0),(2,2,2)\}$ et les deux points critiques sont des points selles.

Exercice 15.

(1) On trouve que $\mathcal{C}=\{(1,2),(-1,0)\}$.
(2) A traiter avec la hessienne!
(3) Oui car $f(1,2)=f(-1,0)=0$ et f est positive sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 16.

(1) A faire!
(2) On trouve que $\mathcal{C}=\left\{(t,...,t),\ t\in\mathbb{R}_+^*\right\}$ et $f(t,...,t)=n^2$ pour tout $t>0$.
(3) On se propose de montrer que f admet un minimum global en ces points. Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on pose :

$$P(t)=\sum_{k=1}^{n}\left(t\sqrt{x_k}+\frac{1}{\sqrt{x_k}}\right)^2.$$

(a) Après calculs, on obtient que : $P(t)=t^2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k+2tn+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}$.
(b) Le polynôme P est du second degré et positif sur $\mathbb{R}$, donc son discriminant est négatif. Calculer le discriminant pour conclure.
(c) On a égalité si et seulement si $x_1=...=x_n$.

Exercice 17.

(1) On trouve que $\mathcal{C}=\emptyset$.

(2) Pas d'extremum local/global.
(3) Si $\mathcal{C}_a$ est l'ensemble des points critiques sous contrainte, vérifier que $\mathcal{C}_a = \left\{\left(\frac{e^{-1/3}}{\sqrt{a}}, \sqrt{a}e^{-1/3}\right)\right\}$. De plus, ce point critique sous contrainte correspond à un minimum global sous contrainte.

Exercice 18.
(1) On trouve que $\mathcal{C} = \{(1,1,1)\}$ et le point critique est un point selle. Pas d'extremum local/global sur $\mathbb{R}^3$.
(2) Si $\mathcal{C}_0$ est l'ensemble des points critiques sous contrainte, vérifier que $\mathcal{C}_0 = \left\{\left(\frac{4}{7}, \frac{1}{7}, \frac{3}{7}\right)\right\}$. De plus, ce point critique sous contrainte correspond à un maximum global sous contrainte.

Exercice 19. Dans les deux cas, on trouve que $(1, ..., 1)$ est l'unique point critique sous contrainte de f, et qu'il correspond à un maximum global sous contrainte.

Exercice 20.
(1) La fonction h est croissante sur $]0, e^{-1}[$, croissante sur $]e^{-1}, +\infty[$, tend vers 0 en 0 et vers $+\infty$ en $+\infty$.
(2) Utiliser la question (1) pour voir que la fonction f est minorée sur $\mathcal{D}$ par $-3e^{-1}$, et qu'elle n'est ni majorée, ni bornée sur $\mathcal{D}$.
(3) A faire!
(4) On trouve que $\mathcal{C} = \{(e^{-1}, e^{-1}, e^{-1})\}$.
(5) (a) Si $\mathcal{C}_a$ est l'ensemble des points critiques sous contrainte, vérifier que $\mathcal{C}_a = \{(a, a, a)\}$.
(b) Calculer la hessienne de f en tout point et utiliser la formule de Taylor avec reste intégral pour montrer que f admet un minimum global sous la contrainte $\mathcal{C}_a$, atteint en (a, a, a) et valant $3a\ln(a)$.

Exercice 21.
(1) On trouve que $\mathcal{C} = \{(10, 10)\}$ et le point critique correspond à un maximum global.
(2) Si $\mathcal{C}_0$ est l'ensemble des points critiques sous contrainte, vérifier que $\mathcal{C}_0 = \{(9, 4)\}$. De plus, le point critique sous contrainte correspond à un maximum sous contrainte, qui vaut 1064.

Exercice 22.
(1) (a) On trouve que $\mathcal{C} = \{(0, 0), (1, 1)\}$, le premier point critique est un point selle et le deuxième correspond à un minimum local.
(b) En calculant $\lim\limits_{y\to\pm\infty} f(x, y)$, on peut vérifier que f n'a aucun extremum global.
(c) La réponse est non (considérer la restriction de f à la droite $\mathrm{Vect}((1, 0))$).
(2) Utiliser le théorème de la bijection après avoir étudié la fonction $h : y \longmapsto f(x, y)$ si $x < \frac{1}{2}$.
(3) Calculer $f(x, \varphi(x))$ en utilisant un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\varphi(x)$, de la forme $\varphi(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + o(x^3)$ au voisinage de 0. On trouve que $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = b = 1$ et $\varphi(x) = 1 + x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$ au voisinage de 0.

Exercice 23.
(1) Question de cours : Cf. cours. On rappelle que $f'_h(x) = \langle\nabla(f)(x), h\rangle$ et $f''_h(x) = q_x(h) = {}^tH\nabla^2(f)(x)H$.
(2) (a) Utiliser la formule de Koenig-Huygens, la linéarité de l'espérance et le fait que les variables aléatoires soient indépendantes.
(b) Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
(c) Sous la contrainte $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$, on a $f(x_1, ..., x_n) = \sigma^2 \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geq \frac{\sigma^2}{n}$, avec égalité si et seulement si $x_1 = ... = x_n = \frac{1}{n}$. Conclure.
(3) (a) La fonction f est polynomiale, et donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. De plus, pour tout $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\nabla(f)(x) = \left(2\sigma^2 x_1 + 2\mu^2\left(\sum_{k=1}^{n} x_k - 1\right), ..., 2\sigma^2 x_n + 2\mu^2\left(\sum_{k=1}^{n} x_k - 1\right)\right).$$

On trouve alors que $a = \left(\frac{\mu^2}{\sigma^2 + n\mu^2}, ..., \frac{\mu^2}{\sigma^2 + n\mu^2}\right)$.

(b) En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, on trouve que :

$$f(a+h) = f(a) + 2\int_0^1 (1-t)\left(\mu^2\left(\sum_{i=1}^n h_i\right)^2 + \sigma^2\sum_{i=1}^n h_i^2\right) dt.$$

Par positivité de l'intégrale, il s'ensuit que $f(a+h) \geq f(a)$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, et donc f admet un minimum global en a.

Exercice 24.

(1) La matrice J_n est de rang 1, ses valeurs propres sont 0 et n et elle est de plus diagonalisable.

(2) A faire!

(3) On trouve que $\mathcal{C} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}, ..., \frac{1}{\sqrt{2n}}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{2n}}, ..., \frac{-1}{\sqrt{2n}}\right)\right\}$.

(4) Avec la question (1), vérifier que les valeurs propres de $H_n(a)$ sont toutes < 0, et donc f_n admet un maximum local en a, qui vaut $f(a) = \sqrt{\frac{n}{2}}e^{-1/2}$.

(5) (a) La fonction h est croissante sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et décroissante sur $\left]\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$.

(b) Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

(c) Si $s = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$, on voit avec les 2 questions précédentes que, pour tout $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x_1, ..., x_n) \leq \sqrt{n}h(s) \leq \sqrt{n}h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{n}{2}}e^{-1/2}.$$

On en déduit que f_n admet un maximum global en a. Idem pour b.