TRAVAUX DIRIGÉS : CONVERGENCES ET APPROXIMATIONS
RÉPONSES - INDICATIONS

Exercice 1. Calculer $F_{Y_n}(x)$, puis $P(|Y_n| > \varepsilon)$ et conclure.

Exercice 2. Appliquer l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $(X_n - X)^2$, en partant du fait que $P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = P((X_n - X)^2 \geq \varepsilon^2)$, puis conclure.

Exercice 3.

(1) On trouve que : $Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p^2)$.
(2) Vérifier que $\mathrm{cov}(Y_n, Y_m) = p^3 q$ si $|n - m| = 1$ et $\mathrm{cov}(Y_n, Y_m) = 0$ si $|n - m| \geq 2$.
(3) Montrer que Y_n et Y_m sont indépendantes si et seulement si $|n - m| \geq 2$.
(4) Calculer $V(S_n)$ et conclure avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 4.

(1) (a) Utiliser l'inégalité de Markov en partant du fait que, pour tout $\lambda \geq 0$:
$$P(X - E(X) \geq t) = P(X - E(X) + \lambda \geq t + \lambda) \leq P((X - E(X) + \lambda)^2 \geq (t + \lambda)^2).$$
(b) La fonction f est décroissante sur $\left[0, \sigma^2/t\right]$, croissante sur $\left]\sigma^2/t, +\infty\right[$ et elle admet donc un minimum atteint en σ^2/t. Il suffit alors de calculer ce minimum pour conclure.

(2) (a) Remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $P([N = n]) \leq P([N > n-1]) \leq P([X_1 > 1] \cap ... \cap [X_n > 1])$. Terminer avec l'indépendance des X_i et la question (1).
(b) Constater que $[N = 0]$ est réalisé si et seulement si tous les X_i sont > 1, c'est-à-dire si $[N > n - 1]$ est réalisé pour tout $n \geq 1$. Conclure avec la question (2)(a).
(c) Utiliser la question (2)(a) pour montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a au voisinage de $+\infty$:
$$n^k P(N = n) = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
En déduire par négligeabilité et par transfert que N admet un moment d'ordre k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Ensuite, montrer à l'aide de la question (2)(a) que, pour tout $\alpha \in \left]0, \ln(\sigma^2 + 1) - \ln(\sigma^2)\right[$, on a au voisinage de $+\infty$:
$$e^{\alpha n} P(N = n) = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
Conclure comme précédemment par négligeabilité et par transfert.

Exercice 5.

(1) Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
(2) A l'aide de la question précédente, on trouve que :
$$\lim_{n \to +\infty} e^{-n\theta} \sum_{k \leq nx} \frac{(n\theta)^k}{k!} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < \theta \\ 1 & \text{si} \quad x > \theta \end{cases}.$$
(3) A l'aide du théorème limite central, on obtient que :
$$\lim_{n \to +\infty} e^{-n\theta} \sum_{k \leq n\theta} \frac{(n\theta)^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 6. Montrer que $F_{X_n}(x) = F_X\left(\frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}\right)$, puis faire un passage à la limite.

Exercice 7.

(1) Calculer $F_{X_n}(x)$, puis conclure.
(2) On trouve que (Y_n) converge en loi vers Y, où $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1/\theta)$.

Exercice 8.

(1) Par transfert et stabilité par addition de la loi binomiale, on trouve que : $\lim\limits_{n \to +\infty} E\left(e^{M_n}\right) = e^p$.

(2) Utiliser la loi faible des grands nombres pour montrer que (e^{M_n}) converge en probabilité vers e^p.

Exercice 9.
(1) A faire!
(2) Montrer que (M_n) converge en probabilité vers b.
(3) Utiliser le calcul de $F_{M_n}(x)$ pour montrer que (M_n) converge en loi vers b.

Exercice 10.
(1) Vérifier que $X_n + 1 \hookrightarrow \mathcal{P}(1)$. En déduire par stabilité par addition de la loi de Poisson que :
$$\forall k \in [\![-n, +\infty[\![, \quad P([S_n = k]) = \frac{e^{-n} n^{n+k}}{(k+n)!}.$$
(2) Suivre l'indication donnée!

Exercice 11.
(1) A faire!
(2) On trouve que : $F_{Y_n}(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{si} & x < 0 \\ 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si} & x \in [0, n] \\ 1 & \text{si} & x > n \end{array} \right.$.
(3) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{Y_n}(x)$.

Exercice 12. Vérifier que $-\ln(U_n) \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. Conclure avec le théorème central limite que $(\ln(Y_n))$ converge en loi vers une variable normale centrée réduite.

Exercice 13.
(1) (a) A l'aide du produit de convolution, on trouve que :
$$g_2(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{si} & x < 0 \\ 2\alpha e^{-\alpha x}(1 - e^{-\alpha x}) & \text{si} & x \geq 0 \end{array} \right. .$$
(b) A démontrer par récurrence à l'aide du produit de convolution.
(c) On trouve que $E(Z_n) = \dfrac{1}{\alpha} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $E(Z_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{\alpha}$.
(d) On trouve que $V(Z_n) = \dfrac{1}{\alpha} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $V(Z_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\alpha} \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.
(2) (a) On trouve que : $F_{H_n}(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{si} & x < 0 \\ (1 - e^{-\alpha n x})^n & \text{si} & x \geq 0 \end{array} \right.$.
(b) Vérifier que $(U_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers 0.
(c) Etablir que $(U_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers 0.
(d) On trouve que $\lim\limits_{n \to +\infty} E(U_n) = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} V(U_n) = 0$.

Exercice 14. On trouve que $P([X > 25]) = \Phi(0) = 0,5$ et $P([X \leq 30]) = \Phi(1) \simeq 0,8413$.

Exercice 15. Si X est le nombre d'erreurs dans un DS, alors $P(X \leq 15) = 1 - \Phi(1) \simeq 0,1587$.

Exercice 16. On trouve que $P(S \leq 1,1) = P(S^* \leq \sqrt{2}) = \Phi(\sqrt{2}) \simeq 0,9310$.

1. Exercices supplémentaires

Exercice 17. Si X est une variable normale centrée réduite, alors on a pour tout $x > 0$:
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt = P(0 \leq X \leq x) = \frac{1}{2} - P(X \geq x).$$
D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on trouve que, pour tout $x > 0$:
$$P(X \geq x) = \frac{1}{2} P(|X - 0| \geq x) \leq \frac{1}{2x^2}.$$
Conclure avec les deux relations ci-dessus.

Exercice 18.

(1) Appliquer l'inégalité de Markov à $(X_n - m)^2$ et à ε^2.
(2) A faire avec la question précédente!
(3) A l'aide de la question (2), montrer que (X_n) converge en probabilité vers 1. Par composition avec l'exponentielle, en déduire que $(\exp(X_n))$ converge en probabilité vers e.

Exercice 19.

(1) On commence par écrire que :

$$\omega \in A \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \forall k \geq n,\ |X - X_n|(\omega) \leq \varepsilon.$$

Pour $\varepsilon > 0$, ceci nous donne que :

$$\begin{aligned} \omega \in A &\implies \exists n \in \mathbb{N},\ \forall k \geq n,\ |X - X_n|(\omega) \leq \varepsilon \\ &\implies \omega \text{ appartient à } B_n \text{ pour un certain } n \\ &\implies \omega \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n. \end{aligned}$$

On en déduit que $A \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$.

(2) La suite (B_n) d'événements est croissante pour l'inclusion, et de plus $P(A) = 1$. D'après la propriété de limite monotone, on a $\lim_{n\to+\infty} P(B_n) = 1$.
(3) Vérifier que $0 \leq P(|X_n - X| > \varepsilon) \leq P\left(\overline{B_n}\right)$ et conclure par encadrement.

Exercice 20.

(1) Utiliser l'inégalité de Markov.
(2) (a) On trouve que $P(Y_n \neq 0) = (1 - e^{-\lambda})^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
(b) Pour tout $\varepsilon > 0$, on constate que $0 \leq P(|Y_n - 0| \geq \varepsilon) \leq P(Y_n \neq 0)$. Conclure par encadrement.
(c) On trouve que $E(Y_n) = \lambda^n = E(|Y_n|)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et donc (Y_n) ne converge pas en moyenne vers 0. Conclure avec la question (1) que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas en moyenne de façon générale.

Exercice 21.

(1) A faire!
(2) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de densité f. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \max(X_1, ..., X_n)$ et $T_n = ne^{-M_n}$.
(a) On trouve que $F_{M_n}(x) = \dfrac{1}{(1 + e^{-x})^n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
(b) Vérifier tout d'abord que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$F_{T_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x < 0 \\ 1 - \frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} & \text{si } \ x \geq 0 \end{cases}.$$

Par passage à la limite, en déduire que (T_n) converge en loi vers une variable aléatoire T, où T suit la loi exponentielle de paramètre 1.

Exercice 22.

(1) L'intégrale I_n converge comme valeur de la fonction Γ d'Euler, et de plus $I_n = \Gamma(n) = (n-1)!$.
(2) Dans cette question, on considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1, et l'on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.
(a) On voit que $S_n \hookrightarrow \gamma(n)$.
(b) Effectuer le changement de variable $u = 2x$!
(c) A l'aide du théorème central limite, on trouve que :

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = \lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \geq 1\right) = 1 - \Phi(1).$$

Exercice 23. Vérifier tout d'abord que $P(N_n \geq x) = \prod_{0\leq i<nx} \left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)$, puis montrer que :

$$P(N_n \leq x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } \ x < 0 \\ 1 - e^{\lambda x} & \text{si } \ x \geq 0 \end{cases}.$$

En déduire que (N_n) converge en loi vers une variable exponentielle de paramètre λ.

Exercice 24. Calculer $P(Z_n \leq x)$ et montrer que (Z_n) converge en loi vers Z, où Z est une variable à densité, de fonction de répartition :

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ e^{-\alpha/x^\lambda} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}.$$

Exercice 25.

(1) Cf. cours!

(2) (a) A justifier par télescopage!

(b) On trouve que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ et $r_n = \frac{1}{n+1}$.

(3) (a) On trouve que $X_k - \dfrac{1}{k(k+1)} \hookrightarrow \mathcal{U}([-1,1])$, $E\left(X_k - \dfrac{1}{k(k+1)}\right) = 0$ et $V\left(X_k - \dfrac{1}{k(k+1)}\right) = \dfrac{1}{3}$.

(b) Vérifier que, si $Z_n = X_n - \dfrac{1}{n(n+1)}$, alors $\overline{Z_n}^* = \sqrt{3}Y_n$. En déduire que (Y_n) converge en loi vers une variable normale de paramètres $0, \dfrac{1}{3}$.

(4) (a) Utiliser le fait que $\varepsilon > 0$ et que la suite $\left(\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$ converge vers 0.

(b) On trouve que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(Y_n \leq \varepsilon) = \Phi\left(\sqrt{3}\varepsilon\right)$.

(c) Montrer que $P(Y_n \leq 0) \leq P\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k \leq 1\right) = P\left(Y_n \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}(n+1)}\right) \leq P(Y_n \leq \varepsilon)$ pour n assez grand. En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} P(Y_n \leq 0) \leq \lim_{n\to+\infty} P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k \leq 1\right) \leq \Phi\left(\sqrt{3}\varepsilon\right).$$

Conclure avec la question (3)(b) que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k \leq 1\right) = \frac{1}{2}$.

Exercice 26.

(1) A l'aide de l'inégalité triangulaire, montrer que :

$$\left[|c_n|.|X_n - X| < \frac{\varepsilon}{2}\right] \bigcap \left[|c_n - c|.|X| < \frac{\varepsilon}{2}\right] \subset \left[|c_n X_n - cX| < \varepsilon\right],$$

puis passer au contraire.

(2) Utiliser la définition de la convergence en probabilités.

(3) Vérifier avec la propriété de limite monotone que $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} P\left(|X| \geq \frac{\varepsilon}{2}k\right) = 0$, puis conclure en utilisant le fait que $(|c_n - c|)$ converge vers 0.

(4) Soit $\varepsilon > 0$ et soit n_0 un rang tel que $|c_n| \leq |c| + \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. Vérifier avec la question (1) que, pour tout $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} P(|c_n X_n - cX| \geq \varepsilon) &\leq P\left(|c_n|.|X_n - X| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(|c_n - c|.|X| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \\ &\leq P\left(|X_n - X| \geq \frac{\varepsilon}{2(|c| + \varepsilon)}\right) + P\left(|c_n - c|.|X| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \end{aligned}$$

Conclure avec les questions (2) et (3) que la suite $(c_n X_n)$ converge en probabilité vers cX.

(5) Montrer par le calcul que, our tout entier $n \geq 2$:

$$Y_n = \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2 - \frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n} X_k^2.$$

Si l'on pose $U_n = \dfrac{n}{n-1}\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2$ et $V_n = \dfrac{1}{n(n-1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k^2$, vérifier avec la loi faible des grands nombres et la question (4) que (U_n) (resp. (V_n)) converge en probabilité vers μ^2 (resp. 0), puis conclure.

Exercice 27.

(1) On trouve que $E(X_i^k)$ est égale à 1 si k est pair, à 0 si k est impair, et de plus $E(S_n) = 0$ et $V(S_n) = n$.

(2) Procéder par récurrence en utilisant la formule du binôme à l'ordre 4, le lemme des coalitions, les propriétés de l'espérance et le fait que $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$.

(a) Utiliser la question (2) et l'inégalité de Markov.

(b) Ecrire que $A_n = \bigcup_{k\geq n} \left[U_k \geq \frac{1}{\sqrt{k}}\right]$, et donc A_n est un événement comme réunion dénombrable d'événements. Ensuite, redémontrer l'inégalité de Boole, puis établir à l'aide de la propriété de limite monotone que, pour tout $n \geq 1$:

$$P(A_n) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{3}{k^{3/2}}.$$

Conclure par encadrement et en utilisant le fait que le reste d'une série convergente tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

(c) Utiliser tout d'abord la propriété de limite monotone pour montrer que $P(A) = 0$. Partir ensuite de la définition axiomatique de la limite d'une suite pour vérifier que :

$$\forall \omega \in \Omega \setminus A, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = 0.$$