TRAVAUX DIRIGÉS : ESTIMATION
RÉPONSES - INDICATIONS

Exercice 1.

(1) Par stabilité par addition et par changement d'échelle, on trouve que : $\overline{X_n} \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

(2) Utiliser la loi faible des grands nombres.

(3) Utiliser la linéarité de l'espérance et la formule de Koenig-Huygens.

(4) Etablir que $E(V_n) = \sigma^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ et conclure.

(5) On trouve que $a_n = \frac{n}{n-1}$.

Exercice 2.

(1) On trouve que $T_n = 2\overline{X_n}$.

(2) On obtient après calculs que :

$$F_{M_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ (x/\theta)^n & \text{si} \quad x \in [0, \theta] \\ 1 & \text{si} \quad x > \theta \end{cases}.$$

Montrer ensuite que F_{M_n} est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0, \theta\}$. Donc M_n est une variable à densité, de densité :

$$f_{M_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ nx^{n-1}/\theta^n & \text{si} \quad x \in [0, \theta] \\ 0 & \text{si} \quad x > \theta \end{cases}.$$

(3) On trouve que $U_n = \frac{n+1}{n} M_n$.

(4) D'après la loi faible des grands nombres, $\overline{X_n}$ est un estimateur convergent de l'espérance commune $\theta/2$ des X_i. Donc $T_n = 2\overline{X_n}$ est un estimateur convergent de θ. De plus, on trouve après calculs que :

$$V(U_n) = \frac{\theta^2}{n(n+2)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Comme $E(U_n) = \theta$, on en déduit que U_n est aussi un estimateur convergent de θ.

(5) Comme T_n et U_n sont sans biais, que $V(T_n) = \frac{\theta^2}{3n}$ et que $V(U_n) = \frac{\theta^2}{n(n+2)}$, en déduire que U_n est un meilleur estimateur de θ que T_n.

Exercice 3.

(1) Procéder par récurrence avec le lemme des coalitions et le produit de convolution discret.

(2) Utiliser le théorème de transfert!

(3) On trouve que $E(X_n) = \left(\frac{n-1}{n-2}\right) p$ pour tout $n \geq 3$.

(4) Vérifier que $X_n \geq P_n^2$, et en déduire par croissance de l'espérance que $E(X_n) \geq E(P_n^2)$. Conclure avec Koenig-Huygens que $V(P_n) \leq \frac{p}{n-2}$.

(5) Utiliser les questions (2) et (4).

Exercice 4.

(1) On trouve que $E(e^{-cM_n}) = \exp(n\theta(e^{-c/n} - 1))$.

(2) (a) Vérifier à l'aide de la question (1) que $E(T_n) = e^{-\theta}$.

(b) Par transfert et d'après la formule de Koenig-Huygens, on trouve que :

$$V(T_n) = \exp\left(-2\theta + \frac{\theta}{n}\right) - \exp(-2\theta).$$

(c) Utiliser les questions (2)(a) et (2)(b).

Exercice 5.

(1) Utiliser la loi faible des grands nombres. Par ailleurs, on trouve que $Y_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \frac{m^2}{100n}\right)$.
(2) Partir de l'inégalité "$P(|Z_n| \leq 0,01) \geq 0,9$" et utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. On en arrive à $n \geq 1000$, il faut donc effectuer au moins 1000 lancers.
(3) Partir de l'inégalité "$P(|Z_n| \leq 0,01) \geq 0,9$" et utiliser cette fois-ci la loi de Y_n. On en arrive à $n \geq 270,6$, il faut donc effectuer au moins 271 lancers. On constate au passage que n est plus petit en (3) qu'en (2). Cela tient au fait que la majoration donnée par Bienaymé-Tchebychev est grossière et conduit donc à un entier plus grand.

Exercice 6.

(1) A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on trouve que :

$$I_{100} = \left[\overline{X_{100}} - \frac{1}{2\sqrt{5}}, \overline{X_{100}} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\right] = [0,3364; 0,7836].$$

(2) En utilisant une approximation de la loi binomiale par la loi normale, on trouve que :

$$I_{100} = \left[\overline{X_{100}} - 0,098, \overline{X_{100}} + 0,098\right] = [0,462; 0,658].$$

Exercice 7.

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$.
 (a) On trouve que $E(X_1) = 2\theta/3$. Utiliser ensuite la linéarité de l'espérance.
 (b) Justifier que X_1admet une variance, et donc $\overline{X_n}$ converge en probabilité vers $2\theta/3$ d'après la loi faible des grands nombres. En déduire que T_n est un estimateur convergent de θ.
(2) Vérifier que $V(X_1) = \theta^2/18$ et en déduire que :

$$E\left(\overline{X_n}\right) = \frac{2\theta}{3} \quad \text{et} \quad V\left(\overline{X_n}\right) = \frac{\theta^2}{18n}.$$

On peut alors considérer d'après le théorème central limite que :

$$\overline{X_n}^* = \left(\overline{X_n} - \frac{2\theta}{3}\right)\sqrt{\frac{18n}{\theta^2}} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

Partir alors de la relation $P(|\overline{X_n} - 2\theta/3| \leq \gamma) \geq 0,95$ et arriver à $\gamma \geq 1,96\theta/\sqrt{18n}$. En déduire un intervalle de confiance de la forme :

$$I_n = \left[\frac{3\overline{X_n}}{2\left(1 + \frac{2,94}{\sqrt{18n}}\right)}; \frac{3\overline{X_n}}{2\left(1 - \frac{2,94}{\sqrt{18n}}\right)}\right].$$

(3) Pour tout $n \geq 1$, on pose : $M_n = \sup\{X_1, ..., X_n\}$.
 (a) On trouve que :

$$G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ (x/\theta)^{2n} & \text{si} \quad x \in [0, \theta] \\ 1 & \text{si} \quad x > \theta \end{cases}.$$

 (b) Avec la question précédente, on trouve que :

$$P(|M_n - \theta| > \delta) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \delta > \theta \\ \left(\frac{\theta-\delta}{\theta}\right)^{2n} & \text{si} \quad \delta \in]0, \theta] \end{cases}.$$

 En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} P(|M_n - \theta| > \delta)$ converge dans tous les cas.
 (c) On trouve que $E(M_n) = \frac{2n\theta}{2n+1}$, et donc $M'_n = \frac{2n+1}{2n}M_n$ est un estimateur sans biais de θ. Après calculs, on obtient que :

$$V(M'_n) = \frac{\theta^2}{2n(2n+2)}.$$

 En déduire que M'_n est un estimateur convergent de θ.
 (d) Comme T_n et M'_n sont sans biais, que $V(T_n) = \frac{\theta^2}{8n}$ et que $V(M'_n) = \frac{\theta^2}{2n(2n+2)}$, en déduire que M'_n est un meilleur estimateur de θ que T_n.

Exercice 8.

(1) On trouve que $U = \dfrac{X^2}{2\sigma^2} \hookrightarrow \gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

(2) (a) Par stabilité par addition, on trouve que $S_n \hookrightarrow \gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)$.
    (b) Utiliser la linéarité de l'espérance!

(3) (a) Ecrire que $\sqrt{Y_n} = \sigma\sqrt{\frac{2}{n}S_n}$, puis utiliser le théorème de transfert pour montrer que $\sqrt{Y_n}$ admet une espérance et la calculer. On trouve que :

$$E\left(\sqrt{Y_n}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\sqrt{\frac{2}{n}}\sigma.$$

    (b) Conclure avec la question (3)(a) et la linéarité de l'espérance.
    (c) On trouve que :

$$V\left(T_n\right) = \left(\frac{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)^2}{2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)^2} - 1\right)\sigma^2.$$

    (d) Montrer que $(V(T_n))$ converge vers 0, en faisant une distinction de cas suivant la parité de n et en utilisant l'indication donnée, puis conclure.

1. Exercices supplémentaires

Exercice 9.

(1) On trouve que $E(T) = \lambda$, $E(T^2) = \lambda + \lambda^2$ et $E(T^3) = \lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3$.

(2) A faire!

(3) On trouve que $E(T_k^2) = \lambda + \lambda^2$, $E(M_n^2) = \lambda^2 + \dfrac{\lambda}{n}$ et $E(T_k M_n) = \lambda^2 + \dfrac{\lambda}{n}$ pour tout $k \in \{1, ..., n\}$.

(4) On obtient que $E(V_n) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\lambda$, et donc V_n n'est pas un estimateur sans biais de λ.

(5) On trouve que $W_n = \dfrac{n}{n-1}V_n$.

(6) Vérifier que $V(W_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda(1+2\lambda)}{n}$ et $V(M_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n}$. En déduire que M_n est un meilleur estimateur de λ que W_n pour n assez grand.

Exercice 10.

(1) On trouve que $\ln(X) \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha)$.

(2) On obtient que $E(Y_n) = \dfrac{n}{\alpha}$, et donc $T_n = \dfrac{Y_n}{n}$ est un estimateur sans biais de $\dfrac{1}{\alpha}$.

(3) On trouve que $V(Y_n) = \dfrac{n}{\alpha^2}$ et $V(T_n) = \dfrac{1}{n\alpha^2}$, et donc T_n est un estimateur convergent de $\dfrac{1}{\alpha}$.

Exercice 11.

(1) A faire!

(2) Montrer que $E(Z'_n) = a$, puis que $V(Z'_n) = \dfrac{1}{n}$ et conclure.

(3) Montrer que $E(T'_n) = a$, puis que $V(T'_n) = \dfrac{1}{n^2}$ et conclure.

(4) Utiliser les questions précédentes pour montrer que T'_n est un meilleur estimateur de a que Z'_n.

Exercice 12.

(1) On trouve que $T_n = \overline{X_n}^* \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

(2) On trouve que $(\lambda - \overline{X}_n)^2 \leq \dfrac{\lambda}{n}t_\alpha^2$ si et seulement si :

$$\overline{X_n} + \frac{t_\alpha^2}{2n} - \sqrt{\frac{\overline{X_n}t_\alpha^2}{n} + \frac{t_\alpha^4}{4n^2}} \leq \lambda \leq \overline{X_n} + \frac{t_\alpha^2}{2n} + \sqrt{\frac{\overline{X_n}t_\alpha^2}{n} + \frac{t_\alpha^4}{4n^2}}.$$

(3) Si $\lambda_{1,n} = \overline{X_n} + \dfrac{t_\alpha^2}{2n} - \sqrt{\dfrac{\overline{X_n}t_\alpha^2}{n} + \dfrac{t_\alpha^4}{4n^2}}$ et $\lambda_{2,n} = \overline{X_n} + \dfrac{t_\alpha^2}{2n} + \sqrt{\dfrac{\overline{X_n}t_\alpha^2}{n} + \dfrac{t_\alpha^4}{4n^2}}$, alors :

$$P(|\overline{X_n} - \lambda| \leq \gamma) \quad\Longleftrightarrow\quad \gamma \geq \frac{\sqrt{\lambda}t_\alpha}{\sqrt{n}}.$$

Pour $\gamma = \dfrac{\sqrt{\lambda} t_\alpha}{\sqrt{n}}$, on voit aussi que :

$$(|\overline{X_n} - \lambda| \leq \gamma \iff \lambda_{1,n} \leq \lambda \leq \lambda_{2,n}.$$

Donc $[\lambda_{1,n}; \lambda_{2,n}]$ est un intervalle de confiance asymptotique de λ au niveau de confiance $1-\alpha$.

Exercice 13.

(1) (a) On rappelle que :

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/\theta & \text{si } x \in]0, \theta[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x/\theta & \text{si} \quad x \in]0, \theta[\\ 1 & \text{si} \quad x \geq \theta \end{cases}, \quad E(X) = \frac{\theta}{2}, \quad V(X) = \frac{\theta^2}{12}.$$

(b) Utiliser la loi faible des grands nombres.

(2) (a) On trouve que :

$$F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ (x/\theta)^n & \text{si} \quad x \in]0, \theta[\\ 1 & \text{si} \quad x \geq \theta \end{cases}.$$

Conclure que Y_n est à densité. On obtient par ailleurs que $E(Y_n) = \dfrac{n\theta}{n+1}$ et $V(Y_n) = \dfrac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}$.

(b) Vérifier que $E(T'_n) = \theta$ et $V(T'_n) = \dfrac{\theta^2}{n(n+2)}$, puis conclure.

(c) Comme $V(T_n) = \dfrac{\theta^2}{3n}$ et $V(T'_n) = \dfrac{\theta^2}{n(n+2)}$, on voit que $V(T'_n) \leq V(T_n)$ pour n assez grand, et donc T'_n est un meilleur estimateur de θ que T_n.

(3) (a) On trouve que :

$$F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1-(1-x/\theta)^n & \text{si} \quad x \in]0, \theta[\\ 1 & \text{si} \quad x \geq \theta \end{cases}.$$

Conclure que Z_n est à densité. On obtient par ailleurs que $E(Z_n) = \dfrac{\theta}{n+1}$ et $V(Z_n) = \dfrac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}$.

(b) Vérifier que Y_n et $\theta - Z_n$ suivent la même loi, puis conclure.

(c) Développer l'expression $V(T''_n) = V(Y_n + Z_n)$ à l'aide de la covariance, puis utiliser l'inégalité "$|\text{cov}(Y_n, Z_n)| \leq \sqrt{V(Y_n)}\sqrt{V(Z_n)}$" et conclure avec la question (3)(b).

(d) Vérifier avec la question (3)(b) que la suite $(V(Y_n))$ converge vers 0, puis conclure avec (3)(c).

(e) On trouve avec les questions (3)(a) et (3)(b) que, pour n assez grand :

$$V(T''_n) \leq \frac{4n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2} \leq \frac{\theta^2}{3n} = V(T_n).$$

(f) Conclure avec la question précédente que T''_n est un meilleur estimateur de θ que T_n.

Exercice 14.

(1) (a) On trouve que $Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \dfrac{m}{N}\right)$, et donc $E\left(\dfrac{Y_n}{nm}\right) = \dfrac{1}{N}$ et $V\left(\dfrac{Y_n}{nm}\right) = \dfrac{1}{nmN}\left(1 - \dfrac{m}{N}\right)$. Conclure en utilisant le fait que la suite $\left(V\left(\dfrac{Y_n}{nm}\right)\right)$ converge vers 0.

(b) On ne peut-on pas prendre $\dfrac{nm}{Y_n}$ comme estimateur de N car Y_n peut s'annuler.

(c) Vérifier par transfert que $E(B_n) = N\left(1 - \left(1 - \dfrac{n}{N}\right)^{n+1}\right)$.

(2) (a) Pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, D_i représente le nombre de lions, à partir du i-ème lion tatoué, qu'il a fallu capturer pour obtenir le $(i+1)$-ème!

(b) Pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, on trouve que $D_i \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\dfrac{m}{N}\right)$, $E(D_i) = \dfrac{N}{m}$, $V(D_i) = \dfrac{N(N-m)}{m^2}$. Par télescopage, on voit que $X_n = D_1 + ... + D_n$. En déduire que $E(X_n) = \dfrac{nN}{m}$ et $V(X_n) = \dfrac{nN(N-m)}{m^2}$.

(c) Utiliser la question (2)(b)!

(d) Pour n assez grand, on peut supposer que $\widetilde{X}_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\dfrac{N}{m}, \dfrac{N(N-m)}{nm^2}\right)$.

(e) On trouve qu'un intervalle de confiance est donné par $I = [1636; 1964]$.

Exercice 15.

(1) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$P(|V_n - \theta| \geq \varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \varepsilon \leq 2\theta \\ \left(1 - \dfrac{\varepsilon}{2\theta}\right)^n & \text{si} \quad \varepsilon \in]0, 2\theta[\end{cases} .$$

En déduire que la suite (V_n) converge en probabilité vers θ.

(2) (a) Vérifier que $T_n = \dfrac{1}{2}(V_n - U_n)$.

(b) Montrer que (U_n) converge en probabilité vers $-\theta$, et en déduire que (T_n) converge en probabilité vers $\dfrac{1}{2}(\theta - (-\theta)) = \theta$.

Exercice 16.

(1) (a) On trouve que $c = 2$.

(b) Calculer la variance de $\widehat{F_n}$, montrer qu'elle converge vers 0 et conclure.

(2) (a) On trouve que $Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \dfrac{1+\theta}{2}\right)$.

(b) Utiliser la question précédente et la linéarité de l'espérance.

(c) Calculer la variance de $\widehat{\theta_n}$, montrer qu'elle converge vers 0 et conclure.

(3) (a) En utilisant la quantité conjuguée, le fait que $-1 \leq \widehat{\theta_n} \leq 1$ et aussi le fait que $\left|\theta + \widehat{\theta_n}\right| \leq \dfrac{3}{2}$, on trouve que $\lambda = \sqrt{3}$ convient.

(b) Utiliser la question précédente pour vérifier que, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P\left(\left|\sqrt{1 - \widehat{\theta_n}^2} - \sqrt{1 - \theta^2}\right| \geq \varepsilon\right) \leq P\left(\left|\widehat{\theta_n} - \theta\right| \geq \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}\right).$$

En déduire par encadrement que la suite $\left(\sqrt{1 - \widehat{\theta_n}^2}\right)$ converge en probabilité vers $\sqrt{1 - \theta^2}$.

(c) Appliquer le théorème central limite à Y_n, et conclure.