

Programme de colles en Mathématiques

ECG 2 (semaine 20 : 17 mars 2025)

La colle débutera soit par une démonstration d'un résultat de cours (indiqué par un astérisque), soit par un exercice de début de colle. Le programme portera sur les fonctions de plusieurs variables et sur la recherche d'extrema, et plus particulièrement sur les points suivants:

(1) Fonctions de plusieurs variables - Calcul différentiel d'ordre 1 et 2:

Distance (euclidienne) entre deux points.
Définition d'une boule ouverte et d'une boule fermée de $\mathbb{R}^n$.
Définition et propriétés de base des ouverts et des fermés de $\mathbb{R}^n$.
"Toute réunion quelconque et toute intersection finie d'ouverts est un ouvert".
"Toute intersection quelconque et toute réunion finie de fermés est un fermé".
"Toute boule ouverte (resp. fermée) de $\mathbb{R}^n$ est ouverte (resp. fermée) dans $\mathbb{R}^n$ ".
"Tout produit cartésien de n ouverts de $\mathbb{R}$ est ouvert dans $\mathbb{R}^n$ ".
Définition et propriétés de base d'une partie bornée de $\mathbb{R}^n$.
Graphe et lignes de niveau d'une application d'une partie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.
Continuité en un point a et sur une partie U de $\mathbb{R}^n$ - Opérations algébriques.
Continuité des fonctions polynomiales et de la norme euclidienne canonique.
"Tout ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n, f(x) < a\}$, où f est continue sur $\mathbb{R}^n$, est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ".
"Tout ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n, f(x) \leq a\}$, où f est continue sur $\mathbb{R}^n$, est un fermé de $\mathbb{R}^n$ ".
Définition de la i -ème application partielle en un point d'une fonction d'un ouvert U dans $\mathbb{R}$.
Dérivées partielles d'ordre 1 et gradient en un point et sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$.
Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ - Opérations algébriques (somme, produit, quotient, composition).
Expression de la dérivée d'une application de la forme $g(t) = f(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$.
Formule de Taylor-Young à l'ordre 1 en un point a pour les fonctions de U dans $\mathbb{R}$.
Définition d'une droite de $\mathbb{R}^n$ passant par un point a et de vecteur directeur $u \neq 0$.
Dérivée directionnelle première d'une fonction f en un point a et dans une direction u .
Définition d'un minimum/maximum/extremum local (resp. global) pour une fonction d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Définition d'un point critique pour une fonction de U dans $\mathbb{R}$.
Recherche de points critiques - Condition nécessaire d'existence d'un extremum local :
"Si f admet un extremum local en a , alors a est un point critique de f ".
Définition des dérivées partielles d'ordre 2 de f en un point a et sur un ouvert U .
Notion de fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de U dans $\mathbb{R}$ - Opérations algébriques.
"Toute fonction polynomiale est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ ".
Théorème de Schwarz - Matrice hessienne associée à f au point a .
Expression de la forme quadratique q_a associée à la hessienne de f en a .
Définition de la dérivée seconde directionnelle - Expression en fonction de q_a .
Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

(2) Recherche d'extrema des fonctions de plusieurs variables:

Définition d'un maximum/minimum local, d'un extremum local.
Définition d'un maximum/minimum global, d'un extremum global.
"Toute fonction continue sur un fermé borné est bornée et atteint ses bornes".
Définition d'un point critique pour une fonction f d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.
"Si f est $\mathcal{C}^1$ sur U et admet un extremum local en a , alors a est un point critique de f ".
Nature d'un point critique a de f en fonction du signe des valeurs propres de sa hessienne en a ou du signe de la forme quadratique q_a associée à la hessienne en a - Notion de point-selle (ou col).
Définition d'une partie convexe de $\mathbb{R}^n$ - Formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 pour une fonction de plusieurs variables.
Définition d'un ensemble de contraintes linéaires.
Définition d'un extremum local/global d'une fonction f sous contrainte linéaire.
Définition d'un point critique d'une fonction f sous contrainte linéaire.
Caractérisations des points critiques de f sous contrainte linéaire.

Exercices de début de colle:

Exercice 1. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, puis calculer son gradient et déterminer ses points critiques.

Exercice 2. Soit $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ par :

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{x + y}.$$

- (1) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, et donner son gradient et sa hessienne sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
- (2) Montrer que f admet un extremum local sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ que l'on déterminera.

Exercice 3. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = x^2(1 + y)^3 + 7y^2$.

- (1) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, et calculer son gradient et sa hessienne sur $\mathbb{R}^2$.
- (2) Montrer que f admet un unique point critique A que l'on déterminera.
- (3) Montrer que f présente un minimum local en A .

Exercice 4. Pour tout $(x, y, z) \in \mathcal{D} = (\mathbb{R}_+^*)^3$, on pose $f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

- (1) Déterminer les points critiques de f . La fonction f admet-elle des extrema locaux? globaux?
- (2) Déterminer l'unique point critique A de f sous la contrainte $x + y + z = 1$.