Lycée Clemenceau **Jeudi 13 mars 2025**
ECG 2 **Durée : 4 heures**

Concours blanc de Mathématiques $n^o 2$

Remarques : *Il est toujours permis d'admettre les résultats de questions précédentes pour traiter les questions suivantes. Chaque réponse doit être démontrée et toutes les étapes des calculs doivent être données. On attachera un soin tout particulier à la clareté et à la propreté de la rédaction. Les téléphones portables ainsi que tous appareils électroniques sont interdits. Tous les étudiants ont le choix entre deux problèmes, un de type EDHEC et un autre de type ESCP-HEC (maths I). Ils indiqueront lisiblement sur leur première copie le problème qu'ils auront choisi, et ne pourront traiter que les questions de ce problème.*

1. Sujet type EDHEC

Exercice 1. On considère deux variables aléatoires réelles X et Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes deux la loi uniforme sur $[0, 1]$. On désigne par F_X (resp. F_Y) la fonction de répartition de X (resp. Y).

(1) Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur les réels x et y pour que la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ y & 2x \end{pmatrix}$$

soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(2) Ecrire une fonction en Python qui, étant donnés deux réels x, y, affiche la matrice A ci-dessus, puis qui détermine et affiche si cette matrice est diagonalisable ou pas.

(3) (a) Déterminer une densité de X^2 (on ne demande pas de vérifier que X^2 est une variable à densité).

(b) Déterminer une densité de $-Y$ (on ne demande pas de vérifier que $-Y$ est une variable à densité).

(c) En déduire que la variable aléatoire $X^2 - Y$ admet pour densité la fonction h définie par :

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{si} \quad -1 \le x < 0 \\ 1 - \sqrt{x} & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

(d) Déterminer enfin la probabilité que la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Y & 2X \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(4) Ecrire une fonction en Python qui réalise et affiche une simulation de la matrice M ci-dessus.

Exercice 2. Soit E un espace euclidien de dimension $n \ge 2$, soit $\langle , \rangle$ le produit scalaire sur E et soit $\|\|$ la norme associée. Etant donné un vecteur unitaire u de E et un réel $\lambda \neq 0$, on désigne par f_λ l'application qui, à tout vecteur $x \in E$, associe le vecteur $f_\lambda(x) = \lambda\langle x, u\rangle u + x$.

(1) Donner la dimension de $\text{Vect}(u)^\perp$.

(2) Montrer que f_λ est un endomorphisme de E.

(3) Montrer que $P : x \longmapsto x^2 - (\lambda + 2)x + (\lambda + 1)$ est un polynôme annulateur de f_λ.

(4) (a) Montrer que f_λ est un endomorphisme symétrique de E.

(b) Calculer $f_\lambda(u)$ et $f_\lambda(v)$ pour tout vecteur $v \in \text{Vect}(u)^\perp$.

(c) Etablir que f_λ possède deux valeurs propres distinctes et donner les sous-espaces propres associés.

(5) Dans cette question, on suppose que $\lambda = -1$.

(a) Vérifier que f_{-1} est un projecteur.

(b) Montrer que f_{-1} est le projecteur orthogonal sur $\text{Vect}(u)^\perp$.

Exercice 3. Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 2. On désigne par $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3) = (x \longmapsto 1, x \longmapsto x, x \longmapsto x^2)$ la base canonique de E, et on considère l'application f qui, à tout polynôme $P \in E$, associe le reste dans la division par $R : x \longmapsto 1+x^3$ du polynôme $S : x \longmapsto (1-x+x^2)P(x)$. Ainsi, il existe un unique polynôme Q tel que $(1 - x + x^2)P(x) = (1 + x^3)Q(x) + f(P)(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, avec $\deg(f(P)) \le 2$. Enfin, pour tout $P : x \longmapsto a_0 + a_1x + a_2x^2 \in E$ et tout $Q : x \longmapsto b_0 + b_1x + b_2x^2 \in E$, on pose $\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{2} a_k b_k$.

(1) Montrer que f est un endomorphisme de E.

(2) (a) Calculer $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$, puis vérifier que $f(e_1) = -f(e_2) = f(e_3)$.

(b) En déduire une base de $\mathfrak{Im}(f)$.

(c) Donner la dimension de $\ker(f)$ ainsi qu'une base de $\ker(f)$.

(3) (a) Calculer $f(P)$ pour tout $P \in \mathfrak{Im}(f)$.

(b) Etablir que 3 est valeur propre de f et que : $\mathfrak{Im}(f) = \ker(f - 3\text{Id})$.

(c) Montrer que l'endomorphisme f est diagonalisable.

(4) (a) Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
(b) Ecrire une fonction en Python qui, étant donnés deux vecteurs $a = (a_0, a_1, a_2)$ et $b = (b_0, b_1, b_2)$ de $\mathbb{R}^3$, calcule et affiche le produit scalaire (canonique) de a et b.
(c) Vérifier que $\ker(f)$ est l'orthogonal de $\mathfrak{Im}(f)$ pour φ.
(d) Vérifier que $\mathcal{B}$ est une base orthonormale pour φ.
(e) Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Qu'en déduit-on pour l'endomorphisme f?
(f) A l'aide de la question (4)(d), retrouver les résultats des questions (3)(c) et (4)(c).

Problème 1.

Partie I : préliminaire

Dans cette partie, x désigne un réel appartenant à $[0, 1[$.

(1) (a) Simplifier la somme $\sum_{p=1}^{n} t^{p-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0, x]$.
(b) En déduire que : $\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$.
(c) Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$.
(d) Etablir que la série $\sum_{p\geq 1} \frac{x^p}{p}$ converge et que : $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x)$.

(2) (a) Vérifier que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ converge.
(b) Déterminer un majorant du reste d'ordre p de cette série en fonction de p uniquement.
(c) A l'aide de la question (1), montrer que : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x + (1-x)\ln(1-x)$.
(d) Ecrire une fonction en Python permettant de tracer le graphe sur l'intervalle $[0, 0.99]$ de la fonction $x \longmapsto x + (1-x)\ln(1-x)$.
(e) Sans utiliser la fonction logarithme et à l'aide de (2)(b), écrire une fonction en Python qui, étant donnés deux réels $x \in [0, 1[$ et $\varepsilon > 0$, calcule une valeur approchée de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ à ε près.

Partie II

Dans cette partie, on considère une variable aléatoire X de densité f nulle sur $]-\infty, 0[$, continue et strictement positive sur $[0, +\infty[$. On désigne par F la fonction de répartition de X.

(1) Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $1 - F(x) > 0$.
On considère alors la fonction g définie par : $g(x) = \begin{cases} -f(x)\ln(1-F(x)) & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$.
(2) Montrer que g est une densité de probabilité d'une variable aléatoire Y.
(3) Montrer qu'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle vérifient les conditions de la partie II.
(4) On suppose ici que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Déterminer la loi de Y, puis calculer son espérance et sa variance.

Partie III

Dans cette partie, on considère une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et suivant toutes la même loi que X (c'est-à-dire de densité f nulle sur $]-\infty, 0[$, continue et strictement positive sur $[0, +\infty[$, et de fonction de répartition F). A partir de cette suite, on se propose de construire une variable aléatoire Z ayant pour densité la fonction g nulle sur $]-\infty, 0[$ et définie pour tout $x \geq 0$ par : $g(x) = -f(x)\ln(1-F(x))$. Pour ce faire, on considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

(1) Montrer que : $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$.
On considère dès lors une variable aléatoire N, définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendante des variables aléaoires X_i et dont la loi est donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P([N = n]) = u_n$.
On pose alors $Z = \sup\{X_0, X_1, ..., X_N\}$, ce qui signifie que, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$Z(\omega) = \max\{X_0(\omega), X_1(\omega), ..., X_{N(\omega)}(\omega)\}.$$

(2) (a) Exprimer l'ensemble $[Z \leq x] = Z^{-1}(]-\infty, x])$ en fonction des X_i, de N et de $x \in \mathbb{R}$.
(b) En déduire que Z est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
(c) Montrer que la fonction de répartition F_Z de Z est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$F_Z(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(F(x))^{n+1}}{n(n+1)}.$$

(d) A l'aide de la partie I, donner une expression explicite de F_Z sur $[0, +\infty[$ à l'aide de F.
(e) Vérifier que Z est une variable à densité et qu'elle admet bien la fonction g comme densité.

2. Sujet type ESCP-HEC (maths I)

Problème 2. Hormis le résultat de la question (12)(b), la partie IV est indépendante du préliminaire et des parties I, II, III. On rappelle que, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{lll} \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) & \text{et} & \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) & \text{et} & \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a) \end{array}\right. .$$

Préliminaire:

(1) (a) Etablir pour tout $k \in \mathbb{N}$ la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t^2} dt$.

Par la suite, on pose $A_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ *et* $A_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t^2} dt$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$.

(b) Calculer A_0, A_1, A_2.

(2) Déduire de la question (1)(a) la convergence, pour tout $x \in \mathbb{R}$, des deux intégrales :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(2xt) dt \quad \text{et} \quad G(x) = \int_0^{+\infty} t e^{-t^2} \sin(2xt) dt.$$

Partie I.

Dans cette partie, on veut montrer que la fonction F définie ci-dessus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et d'autre part, donner pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'expression de $F(x)$.

(1) (a) Etablir pour tout $u \in \mathbb{R}$ l'inégalité : $|\sin(u)| \leq |u|$.

(b) Pour tous réels u, v, justifier la formule trigonométrique : $\cos(u) - \cos(v) = 2\sin\left(\frac{u+v}{2}\right)\sin\left(\frac{v-u}{2}\right)$.

(c) En déduire que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$.

(2) (a) Pour tout $u \in \mathbb{R}$, justifier à l'aide d'une formule de Taylor les inégalités :

$$|u - \sin(u)| \leq \frac{u^2}{2} \quad \text{et} \quad |1 - \cos(u)| \leq \frac{u^2}{2}.$$

(b) Pour tous réels x, h, établir l'inégalité :

$$|F(x+h) - F(x) + 2hG(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \left(|(2ht - \sin(2ht))\sin(2xt)| + (1 - \cos(2ht))\,|\cos(2xt)|\right) dt.$$

(On pourra admettre l'existence de l'intégrale du second membre, qui découle du préliminaire)

(c) En déduire l'existence d'une constante $C > 0$ telle que, pour tout $(x, h) \in \mathbb{R}^2$:

$$|F(x+h) - F(x) + 2hG(x)| \leq Ch^2.$$

(3) (a) Justifier que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée F' en fonction de G.

(b) En utilisant une intégration par parties, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $F'(x) = -2xF(x)$.

(c) Calculer la dérivée de la fonction $F_0 : x \longmapsto F(x)e^{x^2}$.

(d) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $F(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2}$.

Partie II: Fonction de Dirichlet.

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction φ_n définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$ par :

$$\forall u \in \mathcal{D}, \quad \varphi_n(u) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)u\right)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)}.$$

(L'ensemble $\mathcal{D}$ est l'ensemble des réels qui ne sont pas des multiples entiers de 2π)

(a) Montrer que la fonction φ_n est continue sur $\mathcal{D}$ et prolongeable par continuité en 0.

(b) En déduire que la fonction φ_n admet un prolongement continu sur $\mathbb{R}$.
On note encore φ_n *la fonction ainsi prolongée sur* $\mathbb{R}$.

(c) Montrer que la fonction φ_n est paire.

(2) (a) Pour tous réels u, v, justifier la formule trigonométrique : $\sin(u) - \sin(v) = 2\sin\left(\frac{u-v}{2}\right)\cos\left(\frac{u+v}{2}\right)$.

(b) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $u \in \mathcal{D}$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(ku) = \varphi_n(u) - \frac{1}{2}.$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi_n(u) du$.

(3) Soit ψ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T. Etablir pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'égalité :

$$\int_x^{x+T} \psi(u)du = \int_0^T \psi(u)du.$$

Partie III: Formule sommatoire de Poisson.

Dans cette partie, on note θ un réel > 0 fixé et on considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-\theta x^2}$.

(1) (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les séries $\sum_{k\geq 1} f(x + 2\pi k)$ et $\sum_{k\geq 1} f(x - 2\pi k)$ convergent.

On pose alors pour tout $x \in \mathbb{R}$: $H(x) = f(x) + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} f(x + 2\pi k) + \sum_{k=1}^{+\infty} f(x - 2\pi k)$.

On définit ainsi une fonction H sur $\mathbb{R}$ et on admet sans démonstration dans toute la suite du problème que la fonction H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Préciser la parité de la fonction H et de sa dérivée H'.

(2) Dans cette question, on se fixe un entier naturel n. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction H_N définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$H_N(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{N} f(x + 2\pi k) + \sum_{k=1}^{N} f(x - 2\pi k).$$

(a) Etablir l'égalité suivante : $\displaystyle\int_0^{2\pi} H_N(x)\cos(nx)dx = \int_{-2\pi N}^{2\pi(N+1)} f(u)\cos(nu)du.$

(b) En déduire que l'on a :

$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^{2\pi} H_N(x)\cos(nx)dx = 2\int_0^{+\infty} f(u)\cos(nu)du.$$

(c) Etablir pour tout $x \in [0, 2\pi]$ l'inégalité : $|H(x) - H_N(x)| \leq 2\sum_{k=N+1}^{+\infty} e^{-4\theta\pi^2 k^2}$.

(d) En déduire les égalités :

$$\int_0^{2\pi} H(x)\cos(nx)dx = 2\int_0^{+\infty} f(u)\cos(nu)du = \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} \times \exp\left(-\frac{n^2}{4\theta}\right).$$

(3) Soit x un élément de $[0, 2\pi]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $a_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} H(x)\cos(nx)dx$.

(a) Pour tous réels u, v, justifier la formule trigonométrique : $\cos(u)+\cos(v) = 2\cos\left(\frac{u+v}{2}\right)\cos\left(\frac{v-u}{2}\right)$.

(b) Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, établir l'égalité :

$$a_0 + 2\sum_{n=1}^{N} a_n\cos(nx) = \int_0^{2\pi} H(u)\varphi_N(u + x)du + \int_0^{2\pi} H(u)\varphi_N(u - x)du,$$

où la fonction φ_N a été définie dans la partie II.

(c) En déduire l'égalité :

$$a_0 + 2\sum_{n=1}^{N} a_n\cos(nx) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{H(v + x) + H(v - x)}{2\sin(v/2)}\right] \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)v\right) dv.$$

(d) Justifier la continuité sur le segment $[0, 2\pi]$ de la fonction K_x définie par :

$$K_x(v) = \begin{cases} \dfrac{H(v + x) + H(v - x) - 2H(x)}{2\sin(v/2)} & \text{si} \quad v \in]0, 2\pi[\\ 0 & \text{si} \quad v \in \{0, 2\pi\} \end{cases}.$$

(e) A l'aide de la question (2)(b) de la partie II, établir l'égalité :

$$a_0 + 2\sum_{n=1}^{N} a_n\cos(nx) - 2\pi H(x) = \int_0^{2\pi} K_x(v)\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)v\right) dv.$$

(4) (a) Soit g une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, 1]$. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g(t)\sin(\lambda t)dt$ tend vers 0 quand λ tend vers $+\infty$.

On admet plus généralement que, si g est une fonction continue sur un segment $[\alpha, \beta]$ $(\alpha < \beta)$, alors on a :

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^1 g(t)\sin(\lambda t)dt = 0.$$

(b) Etablir pour tout $x \in [0, 2\pi]$ et pour tout $\theta > 0$ la formule suivante (appelée *formule sommatoire de Poisson*) :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\theta}}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\exp\left(-\frac{n^2}{4\theta}\right)\cos(nx)\right)=e^{-\theta x^2}+\sum_{k=1}^{+\infty}e^{-\theta(x+2\pi k)^2}+\sum_{k=1}^{+\infty}e^{-\theta(x-2\pi k)^2}.$$

Partie IV: Une application probabiliste de la formule sommatoire de Poisson.

Soit p un réel appartenant à $]0,1[$ Deux joueurs A et B lancent tour à tour une pièce de monnaie. Le jet de la pièce donne "pile" avec probabilité p et "face" avec probabilité $1-p$. Le vainqueur de la partie est le joueur qui obtient "pile" le premier, auquel cas la partie s'arrête. Le premier lancer (de rang 1) est effectué par le joueur A. Si la partie ne s'arrête pas avant, les trois lancers suivants (de rangs $2, 3, 4$) sont effectués par le joueur B, les cinq suivants (de rangs $5, 6, 7, 8, 9$) par le joueur A, et ainsi de suite. Après chaque changement de main, le joueur qui reprend la main peut ainsi effectuer (au maximum) deux lancers de plus que ceux que vient d'effectuer l'autre joueur. Enfin, on suppose que les résultats des lancers successifs sont indépendants.

(1) (a) Compléter la fonction en Python suivante qui simule une partie effectuée selon les règles précédentes et affiche le vainqueur.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def jeu(p):
    i=1
    v=1
    s=1
    j=1
    while rd.random()>p:
        i=i+1
        j=j+1
        if j>s:
            v=-v      // changement de main
            s=........
            j=........
    if v==1:
        print('A vainqueur')
    else:
        print('B vainqueur')
    return v
```

(b) Que représente la valeur de i après l'exécution de la fonction `jeu`?

(c) Préciser la signification de la variable v.

(d) Modifier le code de la fonction `jeu` pour qu'elle affiche le nombre de lancers effectués par A.

(2) On suppose que l'expérience aléatoire précédente est modélisée à l'aide d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P_p)$. On note :

- X le nombre de lancers effectués par le joueur A et I l'ensemble des rangs possibles de ses lancers $1, 5, 6, ...$;
- Y le nombre de lancers effectués par le joueur B et J l'ensemble des rangs possibles de ses lancers $2, 3, 4, ...$;
- H l'événement "le vainqueur est A";
- K l'événement "le vainqueur est B".

(a) Justifier que $P_p(H \cup K) = 1$ et identifier la loi de la variable aléatoire $X+Y$.

(b) Montrer que : $\lim\limits_{p\to 1} P_p(H) = 1$.

(3) (a) Justifier que l'ensemble I est inclus dans la réunion $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[\![4n^2+1, 4n^2+4n+1]\!]$.

(b) Montrer que : $P_p(H) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(1-p)^{4n^2}-(1-p)^{4n^2+4n+1}\right]$.

(c) Donner une expression similaire pour $P_p(K)$.

(d) En utilisant le résultat de la question $(4)(b)$ de la partie III, établir l'inégalité **stricte** suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(1-p)^{n^2} > \frac{1}{2}.$$

(e) Que peut-on en déduire concernant le jeu considéré?