

TRAVAUX DIRIGÉS : RECHERCHE D'EXTREMA

1. RECHERCHE D'EXTREMA

Exercice 1. Soit $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ par : $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{x+y}$.

- (1) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, et donner son gradient et sa hessienne en tout point de $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
- (2) Etablir que f admet un extremum local sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
- (3) Montrer que f admet un extremum global sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

Exercice 2. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy + xy^3$.

- (1) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, et calculer son gradient et sa hessienne en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- (2) Déterminer l'ensemble des points critiques de f .
- (3) Montrer que la forme quadratique $q_{(0,0)}$ associée à la hessienne en $(0, 0)$ est positive.
- (4) La fonction f admet-elle un extremum local en $(0, 0)$? Justifier.

Exercice 3. Pour tout $(x, y) \in \mathcal{D} = (\mathbb{R}_+^*)^2$, on pose $f(x, y) = e^{x^2+y^2} - \ln(x) - \ln(y)$.

- (1) Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$.
- (2) Montrer que l'équation $ze^z = 1$ admet une unique solution réelle > 0 .
- (3) Montrer que f admet sur $\mathcal{D}$ un unique point critique $A = (a, b)$, et que $a = b$.
- (4) Calculer la hessienne de f et la forme quadratique $q_{(x,y)}$ associée en tout point $(x, y) \in \mathcal{D}$.
- (5) Déterminer le signe de $q_{(x,y)}(u, v)$ pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$ et tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.
- (6) En déduire que la fonction f présente un extremum global en A .

Exercice 4. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = x^2(1 + y)^3 + 7y^2$.

- (1) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, et calculer son gradient et sa hessienne en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- (2) Montrer que f admet un unique point critique A que l'on déterminera.
- (3) Montrer que f présente un minimum local en A .
- (4) Ce minimum est-il global? Justifier.

Exercice 5. Pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on pose $f(x, y) = x \ln(y) - y \ln(x)$.

- (1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
- (2) Calculer le gradient et la hessienne de f en tout point $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.
- (3) Etudier l'existence d'extrema locaux et globaux de f .

Exercice 6. (ESCP 2013) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \exp \left(n + 1 - \sum_{k=1}^n x_k \right) + \sum_{k=1}^n e^{x_k}.$$

- (1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.
- (2) Calculer le gradient $\nabla(f)$ de f .
- (3) En déduire que f admet un unique point critique noté $\hat{x}$ que l'on déterminera.
- (4) (a) Calculer la hessienne $\nabla^2(f)(\hat{x})$ de f en ce point critique.
 (b) Montrer que : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, {}^tX \nabla^2(f)(\hat{x}) X > 0$.
 (c) En déduire que f admet un minimum local en $\hat{x}$.
 (d) Ce minimum local est-il un minimum global sur $\mathbb{R}^n$? Justifier.

Exercice 7. (HEC 2016) Soit E un espace euclidien et soit $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \sum_{k=1}^p \|x - u_k\|^2$ admet un minimum global sur E et le calculer en fonction de $u_1, \dots, u_p$.

2. RECHERCHE D'EXTREMA SOUS CONTRAINTES

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ par $f(x, y, z, t) = x^4 + y^4 + z^4 + t^4$. On pose $\mathcal{C} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 1, x - y + z - t = 1\}$.

- (1) Montrer que f admet un unique point critique sous la contrainte $\mathcal{C}$ que l'on déterminera.
- (2) Etablir que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $x^4 + (1 - x)^4 \geq \frac{1}{8}$.
- (3) En déduire les extrema globaux éventuels de f sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Exercice 9. Pour tout $(x, y, z) \in \mathcal{D} = (\mathbb{R}_+^*)^3$, on pose $f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

- (1) Déterminer les points critiques de f .
- (2) La fonction f admet-elle des extrema locaux? globaux? Justifier.
- (3) Montrer que f admet un unique point critique A sous la contrainte $x + y + z = 1$ que l'on déterminera.
- (4) Déterminer le signe de la forme quadratique q_B pour tout $B \in \mathcal{D}$.
- (5) En déduire que f admet un minimum global en A sous la contrainte $x + y + z = 1$.

Exercice 10. Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$, on pose $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \dots x_n$ et $g(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$. De plus, pour tout $s > 0$, on pose $\Gamma = \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \mid g(x_1, \dots, x_n) = s\}$.

- (1) Montrer que f admet un maximum M sur Γ , et que ce dernier est atteint sur $\Gamma \cap (\mathbb{R}_+^*)^n$.
- (2) Déterminer les points critiques de f sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$ sous la contrainte $g(x_1, \dots, x_n) = s$.
- (3) En déduire la valeur de M en fonction de s et n puis que, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$:

$$\left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k.$$

Exercice 11. Soit r un réel > 1 . Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in]0, +\infty[^n$, on pose :

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n) = \ln(x_1) + \ln(x_2) + \dots + \ln(x_n).$$

- (1) Vérifier que l'ensemble $]0, +\infty[^n$ est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$.
- (2) Montrer que la fonction h admet un unique point critique sous la contrainte $x_1 + x_2 + \dots + x_n = nr$ que l'on déterminera.
- (3) Calculer la matrice hessienne de h en tout point $(x_1, \dots, x_n) \in]0, +\infty[^n$.
- (4) A l'aide de l'égalité de Taylor avec reste intégral, montrer que h admet un maximum global sur $]0, +\infty[^n$ sous la contrainte $x_1 + x_2 + \dots + x_n = nr$, et donner la valeur de ce maximum.

Exercice 12. (ESCP 2013) On considère l'ensemble $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0\}$ et la fonction f définie pour tout $(x, y) \in U$ par :

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

- (1) Justifier que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
- (2) Déterminer le gradient de f en un point quelconque de U .
- (3) (a) Montrer que les coordonnées x et y d'un point critique de f sont solutions du système d'équations :

$$\begin{cases} 3(x + y) &= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \\ x - y &= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \end{cases}.$$

- (b) Vérifier que la fonction $g : t \mapsto t - \frac{1}{t^2}$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.
- (c) En déduire que f admet un unique point critique M dans U que l'on déterminera.
- (4) (a) Déterminer le signe des valeurs propres de la hessienne de f en tout point de U .
- (b) Qu'en déduit-on sur la nature de M ? Justifier.
- (5) Dans cette question, on veut étudier les extrema de f sur U sous la contrainte $\mathcal{C} : x - y = -1$.
 - (a) Montrer que les coordonnées des points critiques de f sous la contrainte $\mathcal{C}$ vérifient un système d'équations que l'on déterminera.
 - (b) A l'aide de l'étude d'une fonction, prouver qu'il existe un unique point critique sous la contrainte $\mathcal{C}$ (que l'on ne cherchera pas à déterminer). Quelle est sa nature? Justifier.

3. EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

Exercice 13. Déterminer les points critiques de f et leur nature, ainsi que les extrema locaux éventuels de f , et ce dans chacun des cas suivants :

- (1) $f(x, y) = x^3 + 3x^2y - 15x - 12y$, (2) $f(x, y) = xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y}$, (3) $f(x, y) = xy(x + y - 1)$,
 (4) $f(x, y) = (1 - x)(1 - y)(x + y - 1)$, (5) $f(x, y) = x[\ln^2(x) + y^2]$, (6) $f(x, y) = xe^y + ye^x$.

Exercice 14. Déterminer les points critiques de f et leur nature, ainsi que les extrema locaux éventuels de f , et ce dans chacun des cas suivants :

- (1) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$, (2) $f(x, y, z) = (x + z^2)e^{x(y^2 + z^2 + 1)}$,
 (3) $f(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + xyz + y - z$, (4) $f(x, y, z) = xy + yz + zx - xyz$.

Exercice 15. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = (x^2y - x - 1)^2 + (x^2 - 1)^2$.

- (1) Montrer que f admet deux points critiques A et B que l'on déterminera.
 (2) Montrer que f présente un minimum local en A et en B .
 (3) Ces minima sont-ils globaux? Justifier.

Exercice 16. Soit f la fonction de $(\mathbb{R}_+^*)^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{k=1}^n x_k\right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}\right)$.

- (1) Vérifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^n$.
 (2) Déterminer les points critiques de f et donner la valeur de f en ces points.
 (3) On se propose de montrer que f admet un minimum global en ces points. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose :

$$P(t) = \sum_{k=1}^n \left(t\sqrt{x_k} + \frac{1}{\sqrt{x_k}} \right)^2 .$$

- (a) Développer $P(t)$ suivant les puissances de t .
 (b) Etablir l'inégalité recherchée en considérant le discriminant de $P(t)$.
 (c) A quelle condition nécessaire et suffisante cette inégalité est-elle une égalité?

Exercice 17. Pour tout $(x, y) \in \mathcal{D} = (\mathbb{R}^*)^2$, on pose : $f(x, y) = x^2y \ln(x^2y^2)$.

- (1) Déterminer l'ensemble des points critiques de f .
 (2) La fonction f admet-elle des extrema locaux? globaux? Justifier.
 (3) Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Déterminer les extrema éventuels de f sous la contrainte $y = ax$.

Exercice 18. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = x^2 - 2xy + yz + y - z$.

- (1) Montrer que f n'admet pas d'extremum sur $\mathbb{R}^3$.
 (2) Déterminer les extrema de f sous les contraintes $2x - y = 1$, $x + z = 1$.

Exercice 19. Calculer les points critiques et les extrema de f sous contrainte, et ce dans les cas suivants :

- (1) $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2$ sous les contraintes $\mathcal{C} : x_1 + \dots + x_n = n, x_1 > 0, \dots, x_n > 0$.
 (2) $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^4 + \dots + x_n^4$ sous les contraintes $\mathcal{C} : x_1 + \dots + x_n = n, x_1 > 0, \dots, x_n > 0$.

Exercice 20. Soit f la fonction de $\mathcal{D} = (\mathbb{R}_+^*)^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x, y, z) = x \ln(x) + y \ln(y) + z \ln(z)$.

- (1) Etudier la fonction $h : t \mapsto t \ln(t)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
 (2) La fonction f est-elle minorée, majorée, bornée sur $\mathcal{D}$? Justifier.
 (3) Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$.
 (4) Déterminer l'unique point critique A de f sur $\mathcal{D}$.
 (5) Montrer que f admet un minimum local en A . Ce minimum est-il global? Justifier.
 (6) Pour tout $a > 0$, on pose : $\mathcal{C}_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 3a\}$.
 (a) Déterminer l'ensemble des points critiques de f sous la contrainte $\mathcal{C}_a$.
 (b) En déduire que f admet un minimum global sous la contrainte $\mathcal{C}_a$ que l'on déterminera.

Exercice 21. Un agriculteur souhaite améliorer le rendement de son exploitation en utilisant de l'engrais. Une étude a montré que, si B désigne la quantité de semences de blé utilisée et N la quantité d'engrais utilisée, alors le rendement en tonnes par hectare est donné par :

$$f(B, N) = 120B - 8B^2 + 4BN - 2N^2.$$

- (1) Déterminer les extrema de f et donner leur nature.
- (2) Déterminer le maximum du rendement sous la contrainte de budget $B + 2N = 23$.

Exercice 22. (ESCP 2017) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose : $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$.

- (1) (a) Déterminer les extrema locaux de f .
 (b) La fonction f admet-elle des extrema globaux? Justifier.
 (c) La restriction de f à toute droite passant par l'origine $(0, 0)$ a-t-elle un extremum en $(0, 0)$?
- (2) Montrer que, pour tout $x < \frac{1}{2}$, il existe un unique réel y tel que $f(x, y) = 0$.

On définit ainsi une fonction $\varphi :]-\infty, \frac{1}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ qui, à tout $x \in]-\infty, \frac{1}{2}[$, associe l'unique solution y de l'équation $f(x, y) = 0$. On admet que cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -\infty, \frac{1}{2}[$.

- (3) Donner $\varphi(0)$ et $\varphi'(0)$, puis déterminer le développement limité de φ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Exercice 23. (HEC 2018) Dans tout l'exercice, on considère des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi, admettant chacune une espérance notée μ et une variance notée σ^2 . On considère la fonction f définie pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ par :

$$f(x_1, \dots, x_n) = E \left(\left(\sum_{k=1}^n x_k X_k - \mu \right)^2 \right).$$

- (1) Question de cours : Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert non vide Ω de $\mathbb{R}^n$. Donner la définition des dérivées directionnelles première et seconde de f en un point x de Ω dans la direction $h = (h_1, \dots, h_n)$. Exprimer leurs valeurs en fonction du gradient et de la hessienne de f en x .
- (2) (a) Justifier l'égalité : $f(x_1, \dots, x_n) = \sigma^2 \sum_{k=1}^n x_k^2 + \mu^2 \left(\sum_{k=1}^n x_k - 1 \right)^2$.
 (b) Justifier que, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a : $\left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2$.
 (c) En déduire le minimum de f sous la contrainte $\sum_{k=1}^n x_k = 1$.
- (3) (a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et trouver son unique point critique a .
 (b) Montrer que f admet un minimum global en a .

Exercice 24. (ESCP 2021) Soit n un entier ≥ 2 . On note J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1, et on considère la fonction f_n définie pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ par :

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \exp \left(- \sum_{k=1}^n x_k^2 \right).$$

- (1) Déterminer le rang de J_n et en déduire ses valeurs propres. La matrice J_n est-elle diagonalisable?
- (2) Montrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.
- (3) Montrer que f_n admet deux points critiques a et $b = -a$, avec a de coordonnées toutes positives.
- (4) On admet que la hessienne de f_n en a est donnée par :

$$H_n(a) = \frac{-2}{\sqrt{2ne}}(nI_n + J_n).$$

Etablir que f_n admet un extremum local en a . Quelle est sa nature? Donner sa valeur.
 On admet que f_n possède un extremum local de nature et de valeur opposées en b .

- (5) (a) Etudier la fonction $h : t \mapsto te^{-t^2}$ sur $\mathbb{R}_+$.
 (b) Montrer que, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a : $\left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2$.
 (c) En déduire que f_n admet en a et b des extrema globaux.