PRÉPARATION AUX ORAUX DE MATHÉMATIQUES : PROBABILITÉS

1. Variables aléatoires discrètes

Exercice 1. (ESCP 2018) Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante des U_i, et soient X et Y les variables aléatoires définies par:

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} U_i(\omega) \quad \text{et} \quad Y = N - X.$$

(1) Vérifier que pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$, $\quad P([X=k]\cap[Y=\ell]) = \binom{k+\ell}{k} p^k (1-p)^\ell P(N=k+\ell)$.

(2) On suppose que N suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

(3) On suppose que X et Y sont indépendantes et que N prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose également que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X=k) \neq 0$ et que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $P(Y=\ell) \neq 0$.

(a) Vérifier que pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$, on a :

$$(k+1)P(X=k+1)P(Y=\ell)(1-p) = (\ell+1)P(X=k)P(Y=\ell+1)p.$$

(b) En déduire la loi suivie par X, puis celle suivie par Y.

(c) Justifier que N suit une loi de Poisson. Préciser son paramètre.

Exercice 2. (ESCP 2018) Soit n un entier ≥ 2. Soit $p_n \in]0,1[$ et soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des points distincts du plan. On construit une figure géométrique aléatoire admettant ces points pour sommets de la façon suivante. Pour i différent de j, on dessine une arête entre les points A_i et A_j avec la probabilité p_n, et on ne dessine pas d'arête reliant A_i et A_j avec la probabilité $1-p_n$. L'objet de cet exercice est d'évaluer la probabilité d'avoir au moins un sommet isolé, c'est-à-dire un sommet qui n'est relié à aucun autre sommet par une arête. Pour ce faire, on définit des variables aléatoires X_i pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ par :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si } A_i \text{ est isolé} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Enfin, on pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

(1) Déterminer la loi de X_1. En déduire l'espérance de S_n.

(2) En déduire un majorant de la probabilité d'avoir au moins un sommet isolé.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $p_n = c\,\dfrac{\ln n}{n}$ avec $c > 0$.

(3) Dans cette question, on suppose que $c > 1$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} P(S_n = 0) = 1$.

(4) Dans cette question, on suppose que $c < 1$.

(a) Montrer que, pour toute variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a :

$$P(Y=0) \leq \frac{V(Y)}{(E(Y))^2}.$$

(b) Calculer $E(X_iX_j)$ pour $i \neq j$, puis $E(S_n^2)$.

(c) En déduire $\lim_{n\to+\infty} P(S_n = 0)$.

Exercice 3. (ESCP 2019) Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1-p$ et on suppose que:

$$\forall (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \begin{cases} P(X=m) & = \alpha m q^{m-1} \\ P_{[X=m]}(Y=n) & = \begin{cases} \dfrac{1}{m} & \text{si } 1 \leq n \leq m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

où α est un réel strictement positif que l'on déterminera par la suite.

(1) (a) Déterminer la loi conjointe du couple (X,Y) en fonction de α et q.
  (b) En déduire la loi de la variable aléatoire Y. Trouver la valeur de α et reconnaître cette loi.

(2) Soient $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Déterminer $P_{[Y=n]}(X=m)$.

(3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose: $B_n = [Y=n]$.
  (a) Justifier l'existence de l'espérance conditionnelle $E(X|B_n)$ et la calculer. En déduire l'existence de l'espérance de X et la déterminer.
  (b) On considère la variable aléatoire $Z = X + XY$. Montrer que l'espérance conditionnelle $E(Z|B_n)$ existe et la calculer. En déduire que Z admet une espérance et déterminer $E(Z)$.

Exercice 4. (QSP ESCP 2019) Soit $p \in]0,1[$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $q = 1-p$. On considère trois variables aléatoires X, Y, Z définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant respectivement les lois $\mathcal{B}(n,p)$, $\mathcal{B}(n,p)$ et $\mathcal{B}(n,q)$. On définit la matrice aléatoire M par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ 0 & Z(\omega) \end{pmatrix}.$$

Calculer la probabilité que la matrice M soit diagonalisable.

Exercice 5. (ESCP 2021) Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, indépendantes et telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(X=n) = (e-1)e^{-n} \quad \text{et} \quad P(Y=n) = \frac{1}{(e-1)n!}.$$

Soit $(U_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur le segment $[0,1]$. On suppose que les variables aléatoires U_i, X, Y sont indépendantes.

(1) Reconnaître la loi de X.

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \max\{U_1, ..., U_n\}$. Déterminer la fonction de répartition de M_n.

(3) Dans cette question, pour tout $\omega \in \Omega$, on pose $M(\omega) = \max\{U_1(\omega), ..., U_{Y(\omega)}(\omega)\}$. On admet que M est une variable aléatoire.
  (a) Calculer la fonction de répartition de M.
  (b) Calculer l'espérance de M.
  (c) On pose $Z = X - M$. Calculer $P(Z > x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et en déduire la loi de Z.

Exercice 6. (ESCP 2022)

(1) Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Déterminer un équivalent de $\dbinom{n}{k}$ quand n tend vers $+\infty$.

(2) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} x^k$ converge pour tout $x \in]-1,1[$.

Par la suite, on pose $f_k(x) = \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n$.

(3) En utilisant la formule du triangle de Pascal, montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$f_{k+1}(x) = x f_k(x) + x f_{k+1}(x).$$

(4) En déduire l'expression de $f_k(x)$ pour tout $x \in]-1,1[$ en fonction de k.

(5) Soit $p \in]0,1[$ et posons $q = 1-p$. On effectue une suite de lancers avec une pièce truquée qui donne "pile" avec la probabilité p et "face" avec la probabilité q. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité de ne jamais obtenir k "pile" (*indication : pour tout* $n \in [\![k, +\infty[\![$, *on pourra s'intéresser à l'événement* A_n *"obtenir le* k*-ème pile au bout de* n *lancers exactement"*)

Exercice 7. (QSP HEC 2021) Un joueur lance simultanément N dés équilibrés. Puis il effectue un deuxième lancer en ne relançant que les dés qui n'ont pas donné 6. Il continue ainsi, en ne relançant à chaque tirage que les dés n'ayant jamais donné 6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par S_n le nombre de 6 obtenus lors des n premiers lancers.

(1) Déterminer la loi de S_1, puis celle de S_2.
(2) Quelle est la loi de S_n? Son espérance?
(3) Montrer que $P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}[S_n = N]\right) = 1$.

Exercice 8. (HEC 2022) Toutes les variables aléatoires intervenant dans l'exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\{-1, 1\}$, telles que, pour tout entier $k \geq 1$, on a :

$$P(X_k = -1) = P(X_k = 1) = \frac{1}{2}.$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $U_n = \dfrac{S_n^4}{n^4}$.

(1) Enoncer l'inégalité de Markov.
(2) Calculer $E(S_n^2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
(3) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a : $E(S_n^4) = 3n^2 - 2n$.
(4) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $P\left(U_n \geq \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq \dfrac{3}{n^{3/2}}$.

Par la suite, on pose pour tout entier $n \geq 1$:

$$Z_n = \left\{\omega \in \Omega |\ \exists k \geq n,\ U_k(\omega) \geq \frac{1}{\sqrt{k}}\right\}.$$

(5) Montrer que Z_n appartient à $\mathcal{A}$ pour tout $n \geq 1$, puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(Z_n) = 0$.
(6) En déduire qu'il existe $Z \in \mathcal{A}$ tel que $P(Z) = 0$ et que, pour tout $\omega \in \Omega \setminus Z$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n(\omega)}{n} = 0$ (*indication : considérer* $Z = \bigcap\limits_{n\geq 1} Z_n$).

2. Variables aléatoires à densité

Exercice 9. (ESCP 2017) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. La roue d'une loterie est représentée par un disque de rayon 1, dont le centre O est pris pour origine d'un repère orthonormé. Cette roue est lancée dans le sens trigonométrique, l'angle (exprimé en radians) dont elle tourne avant de s'arrêter est une variable aléatoire, notée U. On suppose que U suit la loi exponentielle de paramètre a. La roue porte une marque M qui, au départ, est située au point de coordonnées $(1, 0)$ et qui, après l'arrêt de la roue, se trouve au point de coordonnées aléatoires $X = \cos(U)$, $Y = \sin(U)$. Enfin, on pose :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-au}\cos(u)du \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} e^{-au}\sin(u)du.$$

(1) Montrer que les intégrales I et J convergent.
(2) A l'aide d'intégrations par parties que l'on justifiera, établir deux relations liant I et J. En déduire les valeurs de I et J.
(3) Calculer les espérances des variables aléatoires X et Y.
(4) Dans cette question, on suppose qu'un joueur gagne à cette loterie si, à l'arrêt de la roue, l'ordonnée de M vérifie la relation $Y \geq 1/2$.
    (a) Calculer la probabilité $p(a)$ que le joueur gagne.
    (b) Ecrire une fonction en Python qui, étant donné un réel $a > 0$, permet d'estimer la valeur de $p(a)$.
    (c) Déterminer $\lim\limits_{a\to 0} p(a)$.

Exercice 10. (ESCP 2018) Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit X une variable aléatoire admettant pour densité la fonction f suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}.$$

(1) (a) Déterminer la fonction de répartition de X.

(b) Montrer que X admet une espérance et calculer $E(X)$.

(2) On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$, indépendantes et de même loi que X. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$Z_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n) \text{ et } T_n = Z_n - \ln(n).$$

(a) Montrer que la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire T.

(b) Vérifier que T est à densité et donner une densité f_T de T.

(3) On considère deux variables aléatoires indépendantes U et V admettant chacune f_T pour densité. A l'aide du changement de variable $y = (1 + e^{-x})e^t$, calculer une densité de $W = U - V$.

Exercice 11. (ESCP 2021) Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Le temps d'attente d'un patient chez un dentiste suit une loi uniforme sur $[0, \theta]$, où $\theta > 0$ est un paramètre inconnu propre à chaque dentiste. Un nouveau dentiste s'installe dans votre voisinage, et vous voulez estimer son paramètre θ. A cette fin, vous interrogez ses patients sur leur temps d'attente. On modélise les temps d'attente des patients par une suite $(X_k)_{k\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0, \theta]$ avec $\theta > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$Y_n = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \quad \text{et} \quad Z_n = \max\{X_1, ..., X_n\}.$$

(1) (a) Montrer que Y_n est un estimateur sans biais et convergent de θ.

(b) Etudier la convergence en loi de la suite $(\sqrt{n}(Y_n - \theta))_{n\geq 1}$.

(c) En déduire un intervalle de confiance de θ au niveau de confiance $1 - \alpha$, avec $\alpha \in]0, 1[$ (*On exprimera cet intervalle de confiance à l'aide de Y_n et du réel $t_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$*).

(2) (a) Calculer la fonction de répartition de Z_n.

(b) Etudier la convergence en loi de la suite $(-\sqrt{n}(Z_n - \theta))_{n\geq 1}$.

Exercice 12. (ESCP 2021) On considère la fonction f définie pour tout $x > 0$ par :

$$f(x) = \frac{\sin(2\pi \ln(x))}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\ln^2(x)/2}.$$

(1) A l'aide du changement de variable $u = \ln(x) - k$ que l'on justifiera, montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{+\infty} x^k f(x)dx = 0.$$

(2) Soit Y une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. On pose $X = e^Y$. Montrer que X est une variable aléatoire à densité, dont une densité est donnée par :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\ln^2(x)/2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

(3) Soit a un réel tel que $|a| \leq 1$. On considère la fonction f_a définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f_a(x) = \begin{cases} (1 + a\sin(2\pi \ln(x)))g(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

Montrer que f_a est une densité de probabilité.

(4) Soit Y_a une variable aléatoire à densité, de densité f_a. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$;

$$E(Y_a^k) = E(X^k).$$

(5) En déduire qu'il existe une infinité de lois distinctes qui ont les mêmes moments à tout ordre.

Exercice 13. (QSP ESCP 2022) Soit (λ_n) une suite réelle monotone strictement positive. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi exponentielle de paramètre λ_n. Etudier la convergence en loi de $(X_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 14. (HEC 2022) On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes la loi normale centrée réduite. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $M_n = \max\{X_1, ..., X_n\}$.

(1) Question de cours : définition de la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires. Exemple.

(2) Etudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(M_n)_{n\geq 1}$.

(3) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $G(t) = P(X_1 \geq t)$. Etablir que, pour tout entier $n \geq 2$, il existe un unique réel b_n tel que $G(b_n) = \dfrac{1}{n}$.

(4) (a) Etablir pour tout $x > 0$ l'égalité :

$$G(x) = c\frac{e^{-x^2/2}}{x} - c\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{t^2}dt$$

pour une certaine constante c indépendante de x que l'on précisera.

(b) En déduire l'équivalent suivant :

$$G(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} c\frac{e^{-x^2/2}}{x}.$$

(c) Proposer un équivalent simple de b_n lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

(5) Etudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(b_n(M_n - b_n))_{n\geq 2}$.

Exercice 15. (HEC 2021) Soit un réel > 0. On considère deux variables aléatoires Y et Z indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant toutes deux une loi exponentielle de paramètre λ.

(1) Question de cours : Rappeler la définition et les propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

(2) Soit μ un réel > 0.

(a) Montrer que $Z = -\mu X$ est une variable à densité, et en donner une densité.

(b) On pose $S_\mu = Y - \mu X$. Montrer que S_μ admet pour densité la fonction f_μ définie par :

$$f_\mu(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{1+\mu}e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{\lambda}{1+\mu}e^{\lambda x/\mu} & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

(3) On considère le polynôme Q à coefficients aléatoires défini pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $Q(t) = t^2 + tX - Y$.

(a) Vérifier que Q admet, avec probabilité 1, deux racines réelles aléatoires distinctes, notées S et T, telles que $S \leq 0 \leq T$.

(b) Justifier que, pour tout réel $t \geq 0$, on a $[T \leq t] = [Y - tX \leq t^2]$.

(c) En déduire que la variable aléatoire T admet une densité, et en donner une.

Exercice 16. (QSP HEC 2021) Donner la finalité de la fonction suivante :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def bidule():
    S=0
    for k in range(10000):
        u=rd.random()
        S=S+4/(1+u**2)
    S=S/10000
    return S
```