2

ALGÈBRE

Exercice 2.01.

Soit E un espace vectoriel euclidien. On note $\langle\ ,\ \rangle$ son produit scalaire.

1. Pour tout $u \in E$, on note ϕ_u l'application qui à tout vecteur x de E associe $\phi_u(x) = \langle u, x\rangle$.

a) Montrer que ϕ_u est une forme linéaire.

b) Montrer que l'application Ψ qui, à tout vecteur u de E, associe l'application ϕ_u est injective.

c) En déduire que, pour toute forme linéaire ϕ, il existe un unique vecteur u de E tel que $\phi = \phi_u$.

Dans toute la suite, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2, et pour tout $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la trace de A est notée $\mathrm{tr}(A)$.

On admet que l'application g définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ par $g(A, B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$, est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans toute la suite, H désigne un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$M \in H \Leftrightarrow \mathrm{tr}(AM) = 0.$$

3. Soit $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose

$$B = E_{1,n} + \sum_{i=2}^{n} E_{i,i-1}$$

Montrer que la matrice B est inversible.

4. On note f l'application linéaire canoniquement associé à A et on pose pour tout entier $r \in [\![1, n]\!]$:

$$J_r = \sum_{i=1}^{r} E_{i,i}$$

a) Montrer qu'il existe deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^n$ et un entier $r > 0$ tels que la matrice $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f) = J_r$.

b) En déduire qu'il existe deux matrices inversibles P et Q telles que $A = PJ_rQ$.

5. Montrer que H contient une matrice inversible.

Solution :

1.a) Le produit scalaire est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et est bilinéaire. Ainsi, $\phi_u \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$.

b) Comme le produit scalaire est linéaire à gauche, l'application Ψ est linéaire. Soit $u \in \operatorname{Ker}\Psi$, alors $\phi_u = 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})}$.

En particulier, $\phi_u(u) = \langle u, u\rangle = 0$, soit $u = 0_E$. Ainsi, $\operatorname{Ker}\Psi = \{0_E\}$ et Ψ est injective.

c) Comme Ψ est injective et $\dim E = \dim \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$, alors Ψ est bijective.

2. Comme H est un hyperplan, il existe ϕ forme linéaire non nulle telle que $H = \operatorname{Ker}\phi$. D'après le résultat

précédent, il existe une matrice $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\phi = \phi_U$. Alors, $M \in H$ si et seulement si $\phi(M) = 0$ si et

seulement si $\operatorname{tr}({}^tUM) = 0$. Il suffit donc de poser $A = {}^tU$.

3. La matrice B est une matrice de changement de base, donc est inversible. En effet, la matrice B est associée à l'application $(e_1, e_2, \dots, e_n) \to (e_2, e_3, \dots, e_n, e_1)$, où $(e_1, \dots, e_n)$ désigne la base canonique de E.

4.a) Soit G un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$. On considère une base $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ adaptée à la

décomposition $E = G \oplus \operatorname{Ker} f$. D'après le théorème du rang, G est de même dimension que $\operatorname{Im}\phi$ et $r = \operatorname{rg}(f)$.

Ainsi, en notant $f_i = f(e_i)$ pour $i \in [\![1, r]\!]$, alors $(f_1, \dots, f_r)$ est une famille libre de E qui peut être complétée

en une base $\mathcal{B}_2 = (f_1, \dots, f_n)$ de E. Alors, $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f) = J_r$.

b) Il s'agit des formules de changement de bases.

5. On écrit $A = PJ_rQ$ puis $\operatorname{tr}(AQ^{-1}BP^{-1}) = \operatorname{tr}(PJ_rQQ^{-1}BP^{-1}) = \operatorname{tr}(J_rB) = 0$. Ainsi, $Q^{-1}BP^{-1}$ est inversible et appartient à H.

Exercice 2.02.

Dans cet exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes réelles à n lignes.

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est dite *positive* (respectivement *strictement positive*), si tous les coefficients de M sont positifs ou nuls (respectivement *strictement positifs*).

On note dans ce cas $M \geqslant 0$ (respectivement $M > 0$).

Si M et N sont deux matrices, la notation $M \geqslant N$ (respectivement $M > N$) signifie que $M - N \geqslant 0$ (respectivement $M - N > 0$).

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *productive* si M est positive et s'il existe une matrice positive P de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $P - MP > 0$.

1. Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que M est positive si et seulement si pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $MX \geqslant 0$.

2. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice productive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ une matrice positive de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $P - AP > 0$.

a) Montrer que $P > 0$.

b) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X \geqslant AX$. On pose $c = \min\limits_{i\in[\![1,n]\!]} \left(\dfrac{x_i}{p_i}\right) = \dfrac{x_k}{p_k}$ avec $k \in [\![1, n]\!]$.

Montrer que l'on a :

$$c\left(p_k - \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}p_j\right) \geqslant 0$$

En déduire que $c \geqslant 0$ et que X est positive.

c) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X = AX$. Montrer que $X = 0$.

En déduire que la matrice $(I_n - A)$ est inversible, où I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

d) Montrer que la matrice $(I_n - A)^{-1}$ est positive.

3. Soit B une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $(I_n - B)$ est inversible et $(I_n - B)^{-1} \geqslant 0$.

Soit U l'élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1 et $V = (I_n - B)^{-1}U$.

Montrer que $V - BV > 0$.

Solution :

1. Supposons que $M \geqslant 0$. Tous ses coefficients sont positifs ou nuls. Comme $X \geqslant 0$, ses coefficients sont positifs ou nuls et par produit matriciel, les coefficients de MX sont positifs.

Réciproquement, les coefficients de la matrice colonne e_i représentant la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ étant positifs ou nuls, les colonnes de la matrice M étant formées des coefficients de Me_i, on a $Me_i \geqslant 0$ et donc $M \geqslant 0$.

2. a) On écrit $P = (P - AP) + AP$. Or $P - AP > 0$ et $AP \geqslant 0$. Donc $P > 0$.

b) Par définition de c, on a pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $c \leqslant \dfrac{x_j}{p_j}$. Comme $p_j > 0$, il vient $x_j \geqslant c\,p_j$. Donc :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{k,j} x_j \geqslant c \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} p_j$$

Or $X \geqslant AX$ entraîne que $x_k \geqslant \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} x_j \geqslant c \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} p_j$.

Comme $x_k = c\,p_k$, on obtient :

$$c\left(p_k - \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} p_j\right) \geqslant 0$$

Comme $p_k \geqslant \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} p_j$ est le k-ième élément de la matrice colonne $P - AP > 0$, on a $c \geqslant 0$ et comme $x_j \geqslant c\,p_j$ avec $p_j > 0$, il vient $X \geqslant 0$.

c) Supposons $X = AX$. Alors $-X = A(-X)$; donc $X \geqslant AX$ et $-X \geqslant A(-X)$.

Ainsi $X \geqslant 0$ et $-X \geqslant 0$ et $X = 0$.

De plus, cela signifie que $\ker(I_n - A) = \{0\}$ donc que $I_n - A$ est inversible.

d) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X \geqslant 0$. Posons $Y = (I_n - A)^{-1} X$. On a :

$$Y - AY = (I_n - A)Y = X \geqslant 0 \Rightarrow Y \geqslant AY \Rightarrow Y \geqslant 0$$

Donc $(I_n - A)^{-1} X \geqslant 0$ entraîne que $(I_n - A)^{-1} \geqslant 0$.

3. On sait que $(I_n - B)^{-1} \geqslant 0$. Or $U > 0$, donc $V = (I_n - B)^{-1} U \geqslant 0$.

De plus, comme dans la question précédente $V - BV = U > 0$, donc $V - BV > 0$.

Finalement $B \geqslant 0, V \geqslant 0$ entraînent que $V - BV > 0$: ainsi B est productive.

Exercice 2.03.

Soit A et B deux matrices symétriques d'ordre 2 à coefficients réels. On note $D_1 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ (resp. $D_2 = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2)$) une matrice diagonale semblable à A (resp. à B) avec $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$ (resp. $\mu_1 \geqslant \mu_2$).

1. Justifier que $A + B$ est diagonalisable. On note $D = \mathrm{diag}(\nu_1, \nu_2)$ une matrice diagonale semblable à $A + B$, avec $\nu_1 \geqslant \nu_2$.

2.a) Montrer que la trace d'une matrice symétrique d'ordre 2 est la somme de ses valeurs propres.

b) En déduire l'égalité :

$$\nu_1 + \nu_2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2,$$

3.a) Montrer que pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique, on a :

$$\lambda_2 ||x||^2 \leqslant \langle Ax, x \rangle \leqslant \lambda_1 ||x||^2.$$

b) En déduire l'inégalité :

$$\nu_1 - \nu_2 \leqslant \lambda_1 - \lambda_2 + \mu_1 - \mu_2.$$

4. Établir l'inégalité :

$$|\lambda_1 - \lambda_2 - \mu_1 + \mu_2| \leqslant \nu_1 - \nu_2,$$

5. Montrer que l'ensemble des couples possibles (ν_1, ν_2) est inclus dans un segment $[a, b]$ dont on déterminera les extrémités.

Solution :

1. La matrice $A + B$ est diagonalisable car elle est symétrique à coefficients réels.
On note $\nu_1 \geqslant \nu_2$ les valeurs propres de $A + B$.

2.a) La matrice A symétrique réelle est ortho-diagonalisable. Deux matrices semblables ont même trace car $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. Ainsi la trace de A est la somme de ses valeurs propres.

3. La matrice A étant symétrique, elle est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres de A que l'on note (u_1, u_2) donc soit x un vecteur de $\mathbb{R}^2$, on a

$$x = \langle x, u_1\rangle u_1 + \langle x, u_2\rangle u_2 \Rightarrow Ax = \lambda_1\langle x, u_1\rangle u_1 + \lambda_2\langle x, u_2\rangle u_2 \Rightarrow \langle Ax, x\rangle = \lambda_1\langle x, u_1\rangle^2 + \lambda_2\langle x, u_2\rangle^2$$

Comme $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$, on obtient, pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^2$

$$\lambda_2(\langle x, u_1\rangle^2 + \langle x, u_2\rangle^2) \leqslant \langle Ax, x\rangle \leqslant \lambda_1(\langle x, u_1\rangle^2 + \langle x, u_2\rangle^2) \Rightarrow \lambda_2||x||^2 \leqslant \langle Ax, x\rangle \leqslant \lambda_1||x||^2$$

On a pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^2$ de norme 1

$$\langle (A+B)x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle + \langle Bx, x\rangle \leqslant \lambda_1 + \mu_1 \Rightarrow \nu_1 \leqslant \lambda_1 + \mu_1$$

De même $\lambda_2 + \mu_2 \leqslant \nu_2$. On en déduit $\nu_1 - \nu_2 \leqslant \lambda_1 - \lambda_2 + \mu_1 - \mu_2$.

4. Soit u un vecteur unitaire de $E_{\mu_1}(B)$, on a

$$\nu_2 \leqslant \langle Au, u\rangle + \mu_1 \leqslant \nu_1 \Rightarrow \lambda_2 + \mu_1 \leqslant \nu_1.$$

De même u un vecteur unitaire de $E_{\mu_2}(B)$, on a

$$\nu_2 \leqslant \langle Au, u\rangle + \mu_2 \leqslant \nu_1 \Rightarrow \nu_2 \leqslant \lambda_1 + \mu_2.$$

Ainsi $\lambda_2 + \mu_1 - \lambda_1 - \mu_2 \leqslant \nu_1 - \nu_2$.
De même avec un vecteur unitaire de $E_{\lambda_1}(A)$, puis de $E_{\lambda_2}(A)$, on obtient

$$|\lambda_1 - \lambda_2 - \mu_1 + \mu_2| \leqslant \nu_1 - \nu_2.$$

5. On a $|\lambda_1 - \lambda_2 - \mu_1 + \mu_2| \leqslant \nu_1 - \nu_2 \leqslant \lambda_1 - \lambda_2 + \mu_1 - \mu_2$, et $\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2 = \nu_1 + \nu_2$. Par somme

$$\lambda_1+\mu_2 \leqslant \nu_1 \leqslant \lambda_1+\mu_2,$$

Il existe donc un réel $t\in[0,1]$ tel que $\nu_1=\lambda_1+\mu_2+t(\mu_1-\mu_2)$. On en déduit que

$$\nu_2=\lambda_2+\mu_1-t(\mu_1-\mu_2)$$

Par conséquent

$$\begin{pmatrix}\nu_1\\ \nu_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1+\mu_2\\ \lambda_2+\mu_1\end{pmatrix}+t((\mu_1-\mu_2)\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}.$$

L'ensemble des valeurs propres possibles est donc un segment dont les extrémités sont les points obtenus pour $t=0$ et $t=1$:

$$\begin{pmatrix}\lambda_1+\mu_1\\ \lambda_2+\mu_2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\lambda_1+\mu_2\\ \lambda_2+\mu_1\end{pmatrix}.$$

Exercice 2.04.

Pour tout entier $n\geqslant 2$, on note I_n la matrice identité d'ordre n, J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ exclusivement composée de 1 et X_0 la matrice colonne $\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On désigne par :

• $\mathcal{U}_n$ la famille (finie) des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituées exclusivement de 0 et de 1 et contenant **exactement** deux valeurs 1 dans chaque ligne et dans chaque colonne. On note $u_n=\mathrm{Card}(\mathcal{U}_n)$.

• $\mathcal{H}_n(i,j)$ le sous-ensemble de $\mathcal{U}_n$ formé des matrices dont le coefficient de la ligne i et colonne j vaut 1.

Pour $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, on note $S_{i,j}$ la matrice obtenue en permutant la i-ème colonne et la j-ème colonne de I_n.

1. a) Calculer $S_{i,j}^2$. Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$; décrire les matrices $MS_{i,j}$ et $S_{i,j}M$.

b) Soit $A\in\mathcal{U}_n$. Montrer que X_0 est un vecteur propre de J et de A ; préciser les valeurs propres associées.

c) Montrer que J ne peut pas s'écrire sous la forme $A-B$ avec A et B dans $\mathcal{U}_n$,

2. a) Calculer u_2 et u_3.

b) Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$. Montrer que l'application ϕ définie sur $\mathcal{U}_n$ par $\phi(A)=S_{1,i}AS_{1,j}$ est une application à valeurs dans $\mathcal{U}_n$.

Calculer $\phi\circ\phi$ et déterminer $\phi(\mathcal{H}_n(i,j))$. En déduire que les ensembles $\mathcal{H}_n(i,j)$ ont tous le même cardinal, noté h_n, et que l'on a :

$$\sum_{A\in\mathcal{U}_n}A=h_n\times J$$

c) En remarquant que $\Big(\displaystyle\sum_{A\in\mathcal{U}_n}A\Big)X_0=\sum_{A\in\mathcal{U}_n}(AX_0)$, établir une relation entre u_n et h_n.

Solution :

1. a) On a $S_{i,j}^2 = Id$. La matrice $S_{i,j}M$ est la matrice obtenue en permutant les lignes i et j de M. De même $MS_{i,j}$ est la matrice obtenue en permutant les colonnes i et j de M.

b) On a : $AX_0 = 2X_0$ et $JX_0 = nX_0$.

c) Supposons que $J = A - B$. Alors on aurait : $nX_0 = JX_0 = (A - B)X_0 = 2X_0 - 2X_0 = 0$, ce qui est absurde.

2. a) On a $\mathcal{U}_2 = \{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\}$, et $u_2 = 1$.

De même $\mathcal{U}_3 = \{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\}$, et $u_3 = 6$.

b) Le produit de matrices carrées étant bien défini, il suffit de montrer que $\phi(A) \in \mathcal{U}_n$: permuter deux lignes ne modifie pas le contenu global dans les colonnes (conservation du nombre de 1), puis permuter deux colonnes ne modifie pas le contenu global dans les lignes (conservation du nombre de 1) donc on reste dans $\mathcal{U}_n$.
• $(\phi \circ \phi)(A) = S_{1,i}S_{1,i}AS_{1,j}S_{1,j} = I\ A\ I = A$, donc ϕ est bijective.
• on a $a_{i,j} = 1$ d'où, en permutant successivement les lignes 1 et i puis les colonnes 1 et j, la valeur se retrouve en ligne 1 et colonne 1 d'où $\phi(\mathcal{H}_n(i,j)) \subset \mathcal{H}_n(1,1)$.
De la même manière,$\phi(\mathcal{H}_n(1,1)) \subset \mathcal{H}_n(i,j) \Rightarrow \mathcal{H}_n(1,1) = (\phi\circ\phi)(\mathcal{H}_n(1,1)) \subset \phi(\mathcal{H}_n(i,j))$. Donc $\mathcal{H}_n(1,1) = \phi(\mathcal{H}_n(i,j))$.
• l'application ϕ étant bijective : $\text{Card}(\mathcal{H}_n(i,j)) = \text{Card}(\mathcal{H}_n(1,1))$ est indépendant de i, j.
• ainsi, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, le nombre d'éléments de $\mathcal{U}_n$ prenant la valeur 1 à la ligne i et colonne j est h_n et les autres éléments de $\mathcal{U}_n$ prenant la valeur 0, d'où :$\sum_{A\in\mathcal{U}_n} A = h_n.J$

c) On obtient

$$\Big(\sum_{A\in\mathcal{U}_n} A\Big)X_0 = (h_n.J)X_0 = h_n n X_0 = \sum_{A\in\mathcal{U}_n} (AX_0) = \sum_{A\in\mathcal{U}_n} 2X_0 = 2u_n X_0$$

d'où : $u_n = \dfrac{n.h_n}{2}$

Exercice 2.05.

Soit un entier $n \geqslant 2$.

1. a) Rappeler la formule de Moivre.

b) En déduire l'existence d'un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad T_n(\cos x) = \cos(nx).$$

2. Montrer que pour tout nombre complexe z de module 1, on a :

$$T_n\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right).$$

3. a) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k}$ où $\lfloor n/2 \rfloor$ désigne la partie entière de $\dfrac{n}{2}$.

b) Montrer que le polynôme T_n est à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Déterminer son degré et son coefficient dominant.

4. On considère le nombre complexe $z = \dfrac{3+4i}{5}$.

a) Déterminer son module. Soit θ un argument de z. Préciser $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

b) En utilisant le polynôme T_n, montrer qu'il n'existe aucun entier n de $\mathbb{N}^*$ tel que $z^n = 1$.

Solution :

1. a) La formule de Moivre dit que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout réel x, on a $e^{inx} = (e^{ix})^n$, d'où :

$$\cos(nx) + i\sin(nx) = (\cos x + i \sin x)^n.$$

b) Ainsi, avec la formule du binôme de Newton, on a :

$$\cos(nx) = \mathrm{Re}\left((\cos(x) + i\sin x)^n\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (i\sin x)^k (\cos x)^{n-k}\right).$$

En ne gardant que les termes d'indice pair et en notant $\lfloor n/2 \rfloor$ la partie entière de $\dfrac{n}{2}$, on a :

$$\cos(nx) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2j} (i\sin x)^{2j} (\cos x)^{n-2j} = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2j} (\cos^2 x - 1)^j (\cos x)^{n-2j}$$

On a donc :

$$T_n(X) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2j} (X^2 - 1)^j X^{n-2j}.$$

Pour démontrer l'unicité, on suppose qu'il existe un second polynôme R_n vérifiant la même relation.

Posons $Q_n = T_n - R_n$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q_n(\cos x) = 0$, donc Q_n a une infinité de racines. C'est donc le

polynôme nul, ce qui prouve que $T_n = R_n$.

2. Comme z est un nombre complexe de module 1, on peut l'écrire $z = e^{i\theta}$, où $\theta \in \mathbb{R}$. Dès lors,

$$\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) = \cos(\theta)$$

et

$$\frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{in\theta} + e^{-in\theta}\right) = \cos(n\theta)$$

On obtient la formule demandée grâce à la relation vérifiée par T_n.

3. a) Par la formule du binôme, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k = (1-1)^n = 0$. En sommant ces deux formules, les termes d'indice impair disparaissent et l'on obtient deux fois les termes d'indice pair.

D'où, $2^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k = 2\sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2j}$. Ainsi, $\displaystyle\sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2j} = 2^{n-1}$.

b) Comme $T_n(X) = \displaystyle\sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2j}(X^2-1)^j X^{n-2j}$, on voit déjà que T_n est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Pour tout $j \in [\![0, \lfloor n/2 \rfloor]\!]$, le polynôme $(X^2-1)^j X^{n-2j}$ est de degré n. Par somme, le polynôme T_n est de degré inférieur ou égal à n. Le coefficient de X^n dans T_n est $\displaystyle\sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2j} = 2^{n-1}$. Ceci prouve que T_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}.

4. a) Le nombre complexe z est de module 1. Soit θ un argument de z : $\cos(\theta) = \dfrac{3}{5}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{4}{5}$.

b) Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un entier $n \geqslant 2$ tel que $1 = z^n$. Par identification de la partie réelle, cela donne :

$$1 = \cos(n\theta) = T_n(\cos\theta) = 2^{n-1}(\cos\theta)^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(\cos\theta)^k = 2^{n-1}\left(\frac{3}{5}\right)^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\left(\frac{3}{5}\right)^k$$

où pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $a_k \in \mathbb{Z}$. En multipliant cette égalité par 5^n, on obtient :

$$5^n = 2^{n-1}3^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k 3^k 5^{n-k}.$$

Ceci implique que 5 divise $2^{n-1}3^n$, ce qui constitue une contradiction.

Exercice 2.06.

Dans cet exercice on confondra polynôme et fonction polynomiale.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
1. Montrer que pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$ est convergente.

Pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on définit :

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt.$$

2. Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
3. a) À l'aide du changement de variable $\phi(u) = \cos(u)$ sur un intervalle à préciser, déterminer $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

b) Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{2}$.

On note T_0 le polynôme constant égal à 1.

4.a) Déterminer un réel α pour lequel le polynôme $T_1 = X - \alpha T_0$ vérifie les relations :

$$\langle T_1, T_0\rangle = 0 \text{ et } \mathrm{Vect}(T_1, T_0) = \mathbb{R}_1[X].$$

Préciser les racines de T_1.

b) Déterminer deux réels λ et μ pour lesquels le polynôme $T_2 = X^2 - \lambda T_1 - \mu T_0$ vérifie les relations :

$$\langle T_2, T_0\rangle = \langle T_2, T_1\rangle = 0 \text{ et } \mathrm{Vect}(T_2, T_1, T_0) = \mathbb{R}_2[X].$$

Préciser les racines de T_2.

5. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que P change de signe sur $\mathbb{R}$ et on note $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ ($\alpha_1 < \cdots < \alpha_r$) les racines de P telles que, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, le polynôme P change de signe au voisinage de α_i.

Déterminer le signe du polynôme $P(X)\displaystyle\prod_{i=1}^{r}(X - \alpha_i)$.

6. Soit $(T_0, \ldots, T_n)$ une base de $\mathbb{R}_n[X]$ formée de vecteurs orthogonaux pour le produit scalaire défini à la question 1, telle que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, le polynôme T_k soit de degré k.

Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, le polynôme T_k possède k racines simples et que ces racines appartiennent à l'intervalle $[-1, 1]$.

Solution :

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1,1[$. De plus, $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} \underset{V_1}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}$. Ainsi, si PQ possède une racine en 1, alors l'intégrande est prolongeable par continuité. Sinon, elle est équivalente, à une constante multiplicative près, à $\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ dont l'intégrale converge. Le raisonnement en -1 est identique.

2. La symétrie, la linéarité et la positivité proviennent des propriétés des intégrales généralisées. De plus, si $\langle P,P\rangle = 0$, les fonctions étant continues sur $]-1,1[$, le polynôme P est nul sur $]-1,1[$, donc il possède une infinité de racines, soit $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Ainsi, on a bien défini un produit scalaire.

3. a) La fonction $\cos :]0,\pi/2[\to]0,1[$ est de classe C^1 et strictement décroissante. Ainsi, d'après la parité et la formule de changement de variable, l'intégrale étant convergente,

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = 2\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = 2\int_{0}^{\pi/2} \frac{\sin(u)}{\sin(u)}du = \pi.$$

b) On pose $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto -\sqrt{1-x^2}$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $]-1,1[$ et en prenant bien soin de travailler sur un segment puis de passer à la limite,

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = 2\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = 2\int_{0}^{\pi/2} \sin^2(x)dx.$$

On effectue le même changement de variable que précédemment. Or, comme $\cos(\pi/2 - x) = \sin(x)$, alors $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2(x)dx$ et la somme des deux intégrales vaut $\pi/2$. On obtient ainsi le résultat attendu.

4.a) Cherchons un tel α. Comme $\langle T_1, T_0\rangle = 0$, alors

$$\alpha = \frac{\langle X, T_0\rangle}{\langle T_0, T_0\rangle} = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0,$$

par parité. Ainsi, $T_1 = X$ convient. L'unique racine de T_1 est 0.

b) On reprend les calculs comme précédemment.

$$\lambda = \frac{\langle X^2, T_0\rangle}{\langle T_0, T_0\rangle} = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{2}$$

$$\mu = \frac{\langle X^2, T_1\rangle}{\langle T_1, T_1\rangle} = \frac{1}{\langle T_1, T_1\rangle}\int_{-1}^{1} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0.$$

Ainsi, $T_2 = X^2 - \dfrac{1}{2} = \left(X - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(X + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

5. En notant $Q = \displaystyle\prod_{i=1}^{r}(X - \alpha_i)$, le polynôme Q change de signe en même temps que P. Ainsi, le produit PQ est de signe constant. Il est positif si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$ et négatif sinon.

6. On suppose par l'absurde que T_k possède des racines hors de l'intervalle $[-1,1]$ ou des racines doubles.

On note $-1 \leqslant \alpha_1 < \cdots < \alpha_r \leqslant 1$ les racines de T_k comprises dans l'intervalle $[-1,1]$ en lesquelles T_k change de signe. Alors, $r < k$. On pose alors $Q_k = \displaystyle\prod_{i=1}^{r}(X-\alpha_i)$. (Si T_k ne possède pas de telles racines, on pose $Q_k = 1$).

Alors, $Q_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{r} q_i T_i$ et comme la base est orthogonale et $r < k$, alors $\langle Q_k, T_k\rangle = 0$. Ainsi, $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{Q_k(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0$.

Comme Q_kT_k garde un signe constant, il s'agit du polynôme nul, ce qui est impossible. Ainsi, $r = k$ et T_k possède k racines dans $[-1,1]$ en lesquelles il change de signe, donc ces racines sont simples et sont les seules racines de T_k.

Exercice 2.07.

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On dit que $X \geqslant 0$ (resp. $X > 0$) si pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $x_i \geqslant 0$ (resp. $x_i > 0$).

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que $A \geqslant 0$ (resp. $A > 0$) si pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} \geqslant 0$ (resp. $a_{i,j} > 0$).

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices défini par : $\mathcal{E} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,/\, A \text{ inversible et } A^{-1} \geqslant 0\}$.

1. On suppose que $A \in \mathcal{E}$. Montrer que $\{X \in \mathbb{R}^n / AX \geqslant 0\} \subseteq \{X \in \mathbb{R}^n / X \geqslant 0\}$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\{X \in \mathbb{R}^n / AX \geqslant 0\} \subseteq \{X \in \mathbb{R}^n / X \geqslant 0\}$.

a) On suppose que $AX = 0$. Montrer que $X = 0$. En déduire que A est inversible.

b) En utilisant la base canonique de $\mathbb{R}^n$, montrer que $A^{-1} \geqslant 0$.

3. Soit B la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $A = 2I_n - B$, où I_n désigne la matrice identité d'ordre n.

a) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = AX$. En posant $x_0 = x_{n+1} = 0$, montrer que si $Y \geqslant 0$, alors $X \geqslant 0$.
(on pourra considérer $a = \min\limits_{0 \leqslant i \leqslant n+1} x_i$ et montrer que $a = 0$).

b) En déduire que la matrice A appartient à $\mathcal{E}$.

Solution :

1. Si $Y = AX \geqslant 0$, comme $A^{-1} \geqslant 0$, on a $X = A^{-1}(AX) \geqslant 0$.

2. a) Supposons $AX = 0$; donc $AX \geqslant 0$ et $X \geqslant 0$. Mais $A(-X) = 0$ entraîne que $-X \geqslant 0$. Donc $X = 0$.
On en déduit que $\ker A = \{0\}$ et que A est inversible.

b) Soit e_i le i -ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On a $A(A^{-1}e_i) = e_i \geqslant 0$. Donc $A^{-1}e_i \geqslant 0$. Ceci représente la i-ième colonne de A^{-1} qui est donc positive. Ainsi $A^{-1} \geqslant 0$.

3. a) Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, alors $AX = Y$ est équivalent au système

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = y_1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = y_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ -x_{n-2} + 2x_{2n-1} - x_n = y_{n-1} \\ 2x_n - x_{n-1} = y_n \end{cases}$$

On introduit deux variables $x_0 = x_{n+1} = 0$ de façon à ce que le système précédent devienne

$$\forall k \in [\![0, n+1]\!],\ 2x_k - (x_{k-1} + x_{k+1}) = y_k$$

Supposons $Y = AX \geqslant 0$. Soit $a = \inf\limits_{i \in [\![0,n+1]\!]} x_i$. Montrons que $a = 0$.

- si $a = x_0$ ou $a = x_{n+1}$, on a $a = 0$
- si $a = x_k$, avec $1 \leqslant k \leqslant n$, alors $2a \geqslant x_{k-1} + x_{k+1}$. Or $x_{k-1} \geqslant a$ et $x_{k+1} \geqslant a$. Donc $2a \geqslant x_{k-1} + x_{k+1} \geqslant 2a$. On a donc égalité et $x_{k-1} = x_k = x_{k+1} = a$.

On remonte et on redescend ainsi les équations pour obtenir $a = x_j$ $\forall j \in [\![0, n+1]\!]$, soit $a = 0$.

b) On conclut cet exercice en utilisant les questions précédentes.

Exercice 2.08.

On note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices complexes d'ordre $n \geqslant 2$ et

$$\mathcal{C} = \left\{ \ \Phi \in \mathcal{L}(E) \,/\, \forall M \in E, \quad \Phi({}^tM) = {}^t[\Phi(M)] \ \right\}$$

Si P est une matrice fixée de E, on note Φ_P l'application définie sur E par :

$$\forall M \in E,\ \Phi_P(M) = {}^tPMP + {}^tP{}^tMP$$

On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques de E et $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E.

1. Soit M une matrice inversible de E. Justifier que ${}^tM$ est inversible et exprimer $\left({}^tM\right)^{-1}$ en fonction de M^{-1}.

2.a) Montrer que $\Phi_P \in \mathcal{C}$.

b) On suppose que P est inversible. Déterminer $\ker(\Phi_P)$.

3. a) Montrer que E est la somme directe de l'espace $\mathcal{S}_n$ et de l'espace $\mathcal{A}_n$.
b) Soit $\Phi \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que Φ appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si $\Phi(\mathcal{A}_n) \subset \mathcal{A}_n$ et $\Phi(\mathcal{S}_n) \subset \mathcal{S}_n$.

4. Dans cette question, on a $n = 2$, P non nulle et non inversible. Montrer que $\mathrm{tr}(\Phi_P) = 2(\mathrm{tr}(P))^2$.

Solution :

1. C'est du cours : $MM^{-1} = I$ et en transposant ${}^t\left(M^{-1}\right){}^tM = I$ d'où ${}^tM$ est inversible à gauche donc à droite et $\left({}^tM\right)^{-1} = {}^t\left(M^{-1}\right)$.

2.a) Pour montrer que $\Phi_P \in \mathcal{C}$ il faut démonter que Φ_P est un endomorphisme de E vérifiant $\forall M \in E$, ${}^t\Phi_P(M) = \Phi_P({}^tM)$.
Le côté linéaire de Φ_P vient de la linéarité des pré et post multiplications par une matrice fixe, et de la linéarité de la transposition.
Le fait que Φ_P soit une application de E dans E vient de ce que le produit de deux matrices carrées de taille $n \times n$ est une matrice carrée de taille $n \times n$, et aussi du fait que la transposition est une application de E dans E.
Ensuite, $\forall M \in E, {}^t(\Phi_P(M)) = {}^t({}^tPMP + {}^tP{}^tMP) = {}^tP{}^tMP + {}^tPMP = \Phi_P({}^tM)$, en utilisant les propriétés de linéarité de la transposition et la formule de transposée d'un produit, généralisée à un produit de trois matrices carrées de même taille $n \times n$: ${}^t(ABC) = {}^tC{}^tB{}^tA$

b) On suppose ici P est inversible. On a $\ker(\Phi_P) = \{M \in E, {}^tP(M + {}^tM)P = 0\} = \{M \in E, (M + {}^tM) = 0\}$, grâce à la multiplication à droite et à gauche par des matrices inversibles et par leurs inverses.
Ainsi, si P est inversible, alors $\ker(\Phi_P) = \mathcal{A}_n$.

3. a) Même sur le corps des complexes, toute matrice M de E se décompose de manière unique en $M = A + S$ avec $A \in \mathcal{A}_n$ et $S \in \mathcal{S}_n$ et de plus :

$$S = \frac{M + {}^tM}{2}, \qquad A = \frac{M - {}^tM}{2}$$

b) i) Supposons que Φ est dans $\mathcal{L}(E)$, et que $\Phi(\mathcal{A}_n) \subset \mathcal{A}_n$ et $\Phi(\mathcal{S}_n) \subset \mathcal{S}_n$. Soit donc une matrice M quelconque de E que l'on décompose comme à la question précédente en $M = A + S$ avec $A \in \mathcal{A}_n$ et $S \in \mathcal{S}_n$.

Alors, $\Phi(M) = \Phi(A) + \Phi(S)$ par linéarité. Or d'après l'hypothèse, $\Phi(A) \in \mathcal{A}_n$ et $\Phi(S) \in \mathcal{S}_n$, donc ${}^t(\Phi(M)) = -\Phi(A) + \Phi(S)$.

Et par linéarité comme ${}^tM = S - A$, $\Phi({}^tM) = -\Phi(A) + \Phi(S) = {}^t(\Phi(M))$.

ii) Soit Φ un endomorphisme de E appartenant à $\mathcal{C}$. Soient A et S deux matrices, la première dans $\mathcal{A}_n$ et la seconde dans $\mathcal{S}_n$.
Comme S est symétrique, elle est égale à sa transposée. Ainsi, $\Phi({}^tS) = \Phi(S) = {}^t\Phi(S)$ puisque $\Phi \in \mathcal{C}$, et de même $\Phi({}^tA) = -\Phi(A) = {}^t\Phi(A)$.

Ainsi, on a bien prouvé que $\Phi(S) \in \mathcal{S}_n$ et $\Phi(A) \in \mathcal{A}_n$.

4. Si $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est non inversible, alors ses colonnes sont proportionelles et $ad - bc = 0$.

Déterminons les images par Φ_P de la base canonique $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 2}$. Il vient :

$$\Phi_P(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 2a^2 & 2ab \\ 2ab & 2b^2 \end{pmatrix}, \Phi_P(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 2ac & 2cd \\ 2bc & 2d^2 \end{pmatrix}$$
$$\Phi_P(E_{1,2}) = \Phi_P(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} 2ac & ad + cb \\ ad + cb & 2bd \end{pmatrix}$$

Comme P est non inversible, $ad = bc$, ainsi :

$$\operatorname{tr}(\Phi_p) = 2a^2 + 2d^2 + 2(ad + cb) = 2a^2 + 2d^2 + 4ad = 2(a + d)^2 = 2(\operatorname{tr}(P))^2$$

Exercice 2.09.

Soit un entier $n \geqslant 2$.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixés, on pose : $\Gamma_k = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A^kM = A^{k-1}M\}$.

Montrer que l'ensemble Γ_k est un espace vectoriel.

2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $\Gamma_k \subset \Gamma_{k+1}$.

3. Dans cette question *uniquement*, on prend $n = 3$ et on choisit la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer Γ_1, Γ_2, et Γ_3.

4. On revient au cas général où $n \geqslant 2$.

a) Montrer que si A est inversible, alors $\Gamma_1 = \Gamma_2$.

b) Étudier la réciproque.

On pourra s'intéresser à une matrice M dont toutes les colonnes valent $X \in \ker A$.

5. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $u_k = \dim \Gamma_k$. Montrer que la suite (u_k) est croissante et qu'il existe un unique entier p tel que :

$$\forall\, k < p,\ u_k < u_{k+1} \text{ et } \forall\, k \geqslant p,\ u_k = u_p.$$

6. Montrer que si A est diagonalisable et admet 0 pour valeur propre, alors $p = 2$.

Solution :

1. Γ_k est le noyau de l'endomorphisme $M \mapsto A^k M - A^{k-1}M$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (qui est bien linéaire par bilinéarité du produit de matrices).

2. Pour tout $M \in \Gamma_k$, on a $A^k M = A^{k-1}M$, d'où, en multipliant à gauche par A, on obtient : $A^{k+1}M = A^k M$, ce qui montre que $M \in \Gamma_{k+1}$.

3. Le calcul donne :

$$M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} M = 0 \Leftrightarrow M = 0.$$

$$M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} M = 0 \Leftrightarrow \exists x, y, z \in \mathbb{R},\ M = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$M \in \Gamma_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} M = 0 \Leftrightarrow \exists x, y, z, a, b, c \in \mathbb{R},\ M = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. a) On sait déjà que $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$. Réciproquement, si $M \in \Gamma_2$, alors $A^2 M = AM$; en multipliant à gauche par A^{-1}, on obtient $AM = M$, ce qui montre que $M \in \Gamma_1$. Ainsi on a montré que si A est inversible, alors $\Gamma_2 \subset \Gamma_1$ d'où l'égalité $\Gamma_1 = \Gamma_2$. Cette égalité se prolonge avec la même démonstration à $\Gamma_3, \ldots, \Gamma_n, \ldots$

b) Réciproquement, supposons que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A^2 M = AM \implies AM = M$. Prenons $X \in \ker A$ et la matrice $M = (X|\cdots|X)$, on a $A^2 M = 0 = AM$, donc $AM = M$, soit $AX = X$; ainsi $0 = AX = X$.

On a donc montré que $\ker A = \{0\}$, donc A est inversible.

5. D'après la question 2, par croissance de la dimension, la suite (u_k) est une suite croissante. Comme elle est formée d'entiers naturels inférieurs ou égaux à $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2$, elle ne peut être strictement croissante.

Soit p le plus petit entier tel que $u_p = u_{p+1}$. Ainsi on a $u_k < u_{k+1}$ pour tout $k < p$ et d'autre part on a $\Gamma_{p+1} = \Gamma_p$, soit :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A^{p+1}M = A^p M \Leftrightarrow A^p M = A^{p-1}M$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, en remplaçant M par $A^j M$, on a donc :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A^{p+j+1}M = A^{p+j}M \Leftrightarrow A^{p+j}M = A^{p+j-1}M,$$

ce qui signifie aussi que : $M \in \Gamma_{p+j+1} \Leftrightarrow M \in \Gamma_{p+j}$, soit $\Gamma_{p+j} = \Gamma_{p+j+1}$, d'où $u_{p+j+1} = u_{p+j}$. Ainsi on a montré que $u_k = u_p$ pour tout $k \geqslant p$.

6. Cela revient à prouver que :

• Γ_1 est strictement inclus dans Γ_2, c'est-à-dire qu'il existe une matrice M telle que $A^2M = AM$ et $AM \neq M$;
• $\Gamma_2 = \Gamma_3$, c'est-à-dire que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A^3M = A^2M \Longrightarrow A^2M = AM$.
Si A est de rang r, diagonalisons A sous la forme : $A = P\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, \underbrace{0, \dots, 0}_{(n-r)})P^{-1}$, avec des λ_i tous non nuls. On remarque alors que :
• si $M = P\text{diag}(0, \dots, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_{(n-r)})P^{-1}$ alors $AM = 0 \neq M$ mais $A^2M = AM = 0$.
• la relation $A^3M = A^2M$ entraîne que $A^2M = AM$, en multipliant à gauche par la matrice

$$P\text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_r}, 0, \dots, 0\right) P^{-1}$$

Exercice 2.10.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On identifie un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ à sa matrice M dans la base canonique et on note donc, par abus de notation, $\ker(M)$ au lieu de $\ker(f)$.
La transposée d'une matrice M est notée ${}^tM$. On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les termes sont égaux à 1 et on considère le sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\,;\, A + {}^tA = J - I\}$$

1. Déterminer le spectre de J.

2. Soit A une matrice appartenant à $\mathcal{F}$. On suppose que le rang de A est inférieur ou égal à $n - 2$.

a) Montrer que $\ker(J) \cap \ker(A) \neq \{0\}$.
b) Soit X une matrice colonne non nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ appartenant à $\ker(J) \cap \ker(A)$.
Évaluer de deux manières différentes ${}^tX(A + {}^tA)X$ et en déduire une contradiction.
c) Quelles sont les valeurs possibles pour le rang de A ?

3. a) Soit M une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ une matrice diagonale semblable à M avec $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$.
Établir pour toute matrice colonne X non nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, l'encadrement suivant :

$$\lambda_1 \leqslant \frac{{}^tXMX}{{}^tXX} \leqslant \lambda_n$$

b) En déduire que pour toute matrice A appartenant à $\mathcal{F}$, les valeurs propres réelles de A sont incluses dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right]$.

Solution :

1. On a $J^2 = nJ$ donc le polynôme $X^2 - nX$ est annulateur de J. On en déduit que $\mathrm{Sp}(J) \subset \{0, n\}$.

Comme la matrice J est symétrique réelle, elle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Elle a donc au moins une valeur propre réelle.
Elle ne peut pas en posséder une seule car sinon, elle serait semblable à une matrice scalaire et donc elle-même scalaire. En conclusion $\mathrm{Sp}(J) = \{0, n\}$.

2. a) Si on avait $\ker(J) \cap \ker(A) = \{0\}$, la somme $\ker(J) \oplus \ker(A)$ serait directe. Or $\dim \ker(J) = n - 1$ et si le rang de A était inférieur ou égal à $n - 2$, le noyau de A serait de dimension supérieur ou égal à 2.

On aurait donc : $\dim(\ker(J) \oplus \ker(A)) \geqslant n + 1$. Cette dernière inégalité est impossible.

En conclusion si $rg(A) \leq n - 2$, alors $\ker(J) \cap \ker(A) \neq \{0\}$.

b) On évalue ${}^tX(A + {}^tA)X$ de deux manières différentes :

• En distribuant : ${}^tX(A + {}^tA)X = {}^tXAX + {}^tX{}^tAX$. Comme $X \in \ker(A)$, $AX = 0$ et ${}^tX{}^tA = {}^t(AX) = 0$.

Ainsi : ${}^tX(A + {}^tA)X = 0$.

• En remplaçant $A + {}^tA$ par $J - I$, on a : ${}^tX(A + {}^tA)X = {}^tXJX - {}^tXX$. Comme X est dans $\ker(J)$, il
reste : ${}^tX(A + {}^tA)X = -{}^tXX$.

En identifiant les deux égalités obtenues, on a donc : $\|X\|^2 = 0$. Cela entraîne $X = 0$ ce qui est contradictoire avec l'hypothèse.

c) L'hypothèse $\mathrm{rg}(A) \leqslant n - 2$ est donc impossible. Ainsi $\mathrm{rg}(A) = n - 1$ ou $\mathrm{rg}(A) = n$.

3. a) La matrice M étant symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormale.
Soit $(U_1, \dots U_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de M, associés aux valeurs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Un vecteur X non nul, s'écrit donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k U_k$. Et comme le base est orthonormale, on a : ${}^tXX = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2$.

Finalement, en notant m la plus petite des valeurs propres et M la plus grande :

$$m \leqslant \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_k^2}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2} \leqslant M$$

b) Soit λ une valeur propre de A. En reprenant l'égalité obtenue précédemment :

$${}^tXAX + {}^tX{}^tAX = {}^tXJX - {}^tXX$$

Or ${}^tXAX = \lambda{}^tXX$ et ${}^tX{}^tA = {}^t(AX) = \lambda{}^tX$. D'où ${}^tX{}^tAX = \lambda{}^tXX$. Ainsi : $2\lambda{}^tXX = {}^tXJX - {}^tXX$.

Comme X est non nul, on a : $2\lambda + 1 = \dfrac{{}^tXJX}{{}^tXX}$.

On a vu que les valeurs propres de J étaient 0 et n. En utilisant l'encadrement précédent et en arrangeant, on trouve bien :

$$-\frac{1}{2} \leqslant \lambda \leqslant \frac{n-1}{2}$$

Exercice 2.11.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie $n \geqslant 2$. Soit u un endomorphisme de E.

On suppose qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$, où 0 désigne l'endomorphisme nul.

Un tel endomorphisme u est dit *nilpotent*.

1. a) Montrer que pour tout entier $k \geqslant 2$, on a : $u\big(\mathrm{Ker}(u^k)\big) \subset \mathrm{Ker}(u^{k-1})$.

b) Montrer que l'on a :

$$\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(u^2) \subset \ldots \subset \mathrm{Ker}(u^p) = E.$$

Prouver que toutes ces inclusions sont strictes.

c) Soit $\mathcal{B}_1$ une base de $\mathrm{Ker}(u)$. On la complète en une base $\mathcal{B}_2$ de $\mathrm{Ker}(u^2)$. On continue le procédé en complétant, pour tout entier $k \in [\![0, p-1]\!]$ une base $\mathcal{B}_k$ de $\mathrm{Ker}(u^k)$ en une base $\mathcal{B}_{k+1}$ de $\mathrm{Ker}(u^{k+1})$.

On trouve ainsi une succession de bases $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset \ldots \mathcal{B}_p$, où $\mathcal{B}_p$ est une base de E.

Écrire la matrice représentative M de u dans la base $\mathcal{B}_p$. Préciser sa diagonale.

2. On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où $n \geqslant 2$. On note tr l'application trace.

a) L'ensemble $\mathcal{N}$ est-il un espace vectoriel ?

b) Déterminer la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{tr})$.

c) Montrer que :

$$\mathrm{Vect}(\mathcal{N}) \subset \mathrm{Ker}\,(\mathrm{tr})\,.$$

3. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le seul coefficient non nul vaut 1 et se situe à l'intersection de la ligne i et de la colonne j.

Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on pose :

$$N_k = E_{1,1} - E_{1,k} + E_{k,1} - E_{k,k}.$$

a) Montrer que la famille $\big\{(N_k)_{2\leqslant k\leqslant n}, (E_{i,j})_{i\neq j}\big\}$ est une famille libre.

b) En déduire l'égalité : $\mathrm{Vect}(\mathcal{N}) = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{tr})$.

Solution :

1. a) Soit $k \geqslant 2$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(u^k)$. Alors, $u^{k-1}(u(x)) = u^k(x) = 0$, donc $u(x)$ est dans $\mathrm{Ker}(u^{k-1})$.
b) On voit facilement que pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, $\mathrm{Ker}(u^k) \subset \mathrm{Ker}(u^{k+1})$. De plus, $\mathrm{Ker}(u^p) = \mathrm{Ker}(0) = E$.

Il reste à montrer que les inclusions sont strictes. Pour cela, on trouve un vecteur qui est dans $\mathrm{Ker}(u^{k+1})$ sans être dans $\mathrm{Ker}(u^k)$. Comme $u^{p-1} \neq 0$, il existe un vecteur x de E tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$. Mais alors, pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, le vecteur $y_k = u^{p-1-k}(x)$ appartient à $\mathrm{Ker}(u^{k+1})$ sans être dans $\mathrm{Ker}(u^k)$.

c) Par définition de $\mathcal{B}_1$, on a $u(\mathcal{B}_1) = \{0\}$. Par la question 1(a), $u(\mathcal{B}_2) \in \mathrm{Ker}(u)$.

De même, pour tout entier $k \in [\![2, p]\!]$, $u(\mathcal{B}_k) \in \mathrm{Ker}(u^{k-1})$.

La matrice représentative M de u dans la base $\mathcal{B}_p$ est donc triangulaire supérieure, formée de blocs non nuls se situant strictement au-dessus de la diagonale. Sa diagonale est nulle.

2. a) L'ensemble $\mathcal{N}$ n'est pas un espace vectoriel car il n'est pas stable par addition. En effet, la somme de deux matrices nilpotentes n'est pas toujours nilpotente. Prenons par exemple la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Les matrices M et N sont nilpotentes car $M^2 = N^2 = 0$ (la matrice nulle).

Mais, $M + N = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas nilpotente (calculer son carré).

b) L'application tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'application tr est surjective, donc $\mathrm{Im}(\mathrm{tr}) = \mathbb{R}$.

Par la formule du rang, $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$ est de dimension $n^2 - 1$.

c) Soit N une matrice nilpotente. La question 1.c) montre que l'on peut construire une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice représentative de tout endormorphisme nilpotent est une matrice de diagonale nulle. Cela signifie qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $N = PN'P^{-1}$, où N' est une matrice de la forme de celle trouvée à la question 1.c). Deux matrices semblables ayant la même trace, $\mathrm{tr}(N) = \mathrm{tr}(N') = 0$.

On conclut que toute matrice nilpotente est de trace nulle.

Soit $M \in \mathrm{Vect}(\mathcal{N})$: M s'écrit comme une combinaison linéaire de matrices nilpotentes. Comme l'application trace est linéaire, on en déduit que $\mathrm{tr}(M) = 0$, d'où l'inclusion demandée.

3. a) On considère des réels $(a_k)_{2 \leqslant k \leqslant n}$ et des réels $(\alpha_{i,j})_{i \neq j}$ tels que

$$\sum_{k=2}^{n} a_k N_k + \sum_{i \neq j} \alpha_{i,j} E_{i,j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=2}^{n} a_k \left(E_{1,1} - E_{1,k} + E_{k,1} - E_{k,k} \right) + \sum_{i \neq j} \alpha_{i,j} E_{i,j} = 0$$

d'où

$$0 = \left(\sum_{k=2}^{n} a_k \right) E_{1,1} + \sum_{k=2}^{n} a_k E_{1,k} + \sum_{k=2}^{n} a_k E_{k,1} + \sum_{i \neq j} \alpha_{i,j} E_{i,j}$$

Par liberté de la famille $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$, on conclut que pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $a_k = 0$ et pour tout $i \neq j$, $\alpha_{i,j} = 0$.

Ceci prouve la liberté de la famille considérée.

b) Pour tout $i \neq j$, la matrice $E_{i,j}$ est nilpotente. On vérifie d'autre part que, pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, la matrice N_k est nilpotente. On a ainsi trouvé une famille libre de $\mathrm{Vect}(\mathcal{N})$ qui contient $n^2 - 1$ vecteurs.

Ainsi, $\mathrm{Vect}(\mathcal{N})$ est un espace vectoriel de dimension supérieur ou égal à $n^2 - 1$. Or $\mathrm{Vect}(\mathcal{N}) \subset \mathrm{Ker}\,(\mathrm{tr})$ qui est de dimension n^2-1. Il s'ensuit que $\mathrm{Vect}(\mathcal{N})$ est un espace vectoriel de dimension exactement égal à $n^2 - 1$ et qu'on a l'égalité des deux espaces vectoriels.

Exercice 2.12.

Partie A.

Dans cette partie, E désigne un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2. Soit u un endomorphisme de E.

On note M la matrice représentative de u dans une base fixée de E.

On pose : $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On appelle déterminant de M, noté $\det(M)$, la quantité $ad - bc$.

1. Montrer qu'il existe un polynôme annulateur de M de degré 2 dont on exprimera les coefficients en fonction de la trace de M, notée $\mathrm{tr}(M)$ et de son déterminant $\det(M)$.

2. On suppose que M est semblable à $-M$ et que $\det(M) \neq 0$.

a) Calculer la trace de M.

b) Montrer que M est diagonalisable. Donner une relation entre les valeurs propres et le déterminant de M.

c) Déterminer deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires, notés D et D', de dimension 1 chacun, et tels que $u(D) = D'$ et $u(D') = D$.

Partie B.

Dans cette partie, n est un entier supérieur ou égal à 2 et u un endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n}$ vérifiant $u^2 + Id = 0$.

1. Déterminer les valeurs propres de u.

2. a) Montrer que pour tout vecteur $x \neq 0$, la famille $(x, u(x))$ est libre.

b) On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}, \ldots, e_{2n})$ de $\mathbb{R}^{2n}$ telle que la matrice associée à u dans cette base soit de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$$

3. Déterminer deux sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbb{R}^{2n}$ qui vérifient les deux propriétés :

i) $\mathbb{R}^{2n} = F \oplus G$;

ii) $u(F) \subseteq G,\ u(G) \subseteq F$.

Solution :

Partie A

1. On trouve $M^2 = (a+d)M + (bc-ad)I_2 = \mathrm{tr}(M)M - \det(M)I_2$. On peut donc prendre comme polynôme annulateur de M le polynôme $P(X) = X^2 - \mathrm{tr}(M)X + \det(M)$.

2. a) Comme deux matrices semblables ont la même trace, $\mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(-M) = -\mathrm{tr}(M)$. Donc, $\mathrm{tr}(M) = 0$.

b) Notons $\delta = -\det(M) \in \mathbb{C}^*$. Notons α et β les deux racines distinctes (réelles ou complexes) de P.

Donc, $P(X) = (X-\alpha)(X-\beta)$. D'après la question 1, on a : $0 = P(M) = (M-\alpha I_2)(M-\beta I_2)$.

Si $M - \alpha I_2$ était inversible, on en déduirait que $M = \beta I_2$, mais alors $\mathrm{tr}(M) = 2\beta \neq 0$ (car $\delta \neq 0$).

Il s'ensuit que $M - \alpha I_2$ n'est pas inversible, donc que α est valeur propre de M. On montre de même que β est valeur propre de M. Ainsi, M a deux valeurs propres distinctes : α et β. On conclut que M est diagonalisable.

c) Comme M a deux valeurs propres distinctes, chacun de ses sous-espaces propres est de dimension 1.

On note $E_\alpha = \mathrm{Vect}(e_1)$ et $E_\beta = \mathrm{Vect}(e_2)$. On pose alors $D = \mathrm{Vect}(x)$, où $x = e_1 + e_2$.

Le vecteur x n'est pas nul du fait que la famille $\{e_1, e_2\}$ est libre. On pose $D' = u(D)$.

On va montrer que D et D' sont solutions du problème.

• D est un espace vectoriel de dimension 1. Comme 0 n'est pas valeur propre de M, u est bijectif.

Ainsi, $D' = u(D)$ est également un sous-espace vectoriel de dimension 1. On a $\dim(D) + \dim(D') = 2 = \dim(E)$.

• Soit $z \in D \cap D'$. Le vecteur z s'écrit à la fois $z = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et $z = u(z')$ où $z' = \mu x$ avec $\mu \in \mathbb{C}$.

On obtient ainsi : $\lambda e_1 + \lambda e_2 = \lambda\, x = z = u(\mu e_1 + \mu e_2) = \mu u(e_1) + \mu u(e_2) = \mu\alpha e_1 + \mu\beta e_2$.

Comme $\{e_1, e_2\}$ est une base de E (base de vecteurs propres), il s'ensuit que $\lambda = \mu\alpha = \mu\beta$.

Si $\mu \neq 0$, cela donnerait $\alpha = \beta$, ce qui est exclu. Donc $\mu = 0$, d'où $z = 0$. Ainsi, $D \cap D' = \{0\}$ et $D \oplus D' = E$.

• $D' = u(D)$ par construction de D'.

• On remarque que $M^2 = \delta I_2$, donc $u^2 = \delta\, id_E$. Ainsi,

$$u(D') = u^2(D) = \delta\, id_E(D) = D\,.$$

Partie B

1. Si λ est valeur prope de u, alors $\lambda^2 + 1 = 0$ et $\lambda \in \{\pm i\}$. L'endomorphisme u n'a pas de valeur propre réelle.

2. a) Pour tout x non nul, la famille $(x, u(x))$ est libre ; sinon u posséderait une valeur propre réelle.

b) On choisit $e_1 \neq 0$ et $F_1 = \text{Vect}(e_1, u(e_1))$ qui est de dimension 2. Soit G_1 tel que $F_1 \oplus G_1 = \mathbb{R}^{2n}$. Soit $e_2 \in G_1$.

Montrons que la famille $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2))$ est libre.

Par contraposée, supposons que $u(e_2) = \alpha e_2 + x$ avec $x \in F_1$. En composant par u, il vient :

$$\begin{cases} u(e_2) = \alpha e_2 + x \\ -e_2 = \alpha u(e_2) + u(x) \end{cases}$$

Donc $e_2 = -\alpha^2 - \alpha x + u(x) \Rightarrow (1 + \alpha^2)e_2 \in F_1$ ce qui est contradictoire avec le choix de e_2.

On pose $F_2 = \text{Vect}(e_2, u(e_2))$. En continuant ce processus, on construit une base de $\mathbb{R}^{2n}$:

$$(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \ldots, e_n, u(e_n))$$

La base demandée est $(e_1, \ldots, e_n, u(e_1), \ldots, u(e_n))$.

3. De manière immédiate $F = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$ et $G = \text{Vect}(u(e_1), \ldots, u(e_n))$.

Exercice 2.13.

Soit un entier $n \geqslant 2$. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique associée au produit scalaire donné par $\langle x, y \rangle = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ où $x = {}^t(x_1, \cdots, x_n)$ et $y = {}^t(y_1, \cdots, y_n)$ et $\|.\|$ la norme associée.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le spectre de A est noté $\text{Sp}(A)$. On dit que A est une *contraction* (resp. une contraction stricte) si on a :

$\|Ax\| \leqslant \|x\|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ (resp. $\|Ax\| < \|x\|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$).

Dans toute la suite, on note P (resp. Q) une matrice associée, dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, à un projecteur orthogonal p (resp. q).

1. Dans cette question, on suppose que les matrices P et Q commutent.

a) On pose $T = P - Q$. Justifier que T est une matrice symétrique.

b) Soit $\lambda \in \text{Sp}(T)$ et x un vecteur propre associé à λ. Montrer que si $Px = 0$, alors $\lambda \in \{-1, 0\}$. Prouver que si $Px \neq 0$, alors Px est un vecteur propre de Q. En déduire que $\text{Sp}(T) \subseteq \{-1, 0, 1\}$.

c) Montrer que T est une contraction.

d) Prouver que si T est une contraction stricte, alors on a nécessairement $P = Q$.

2. Dans cette question, on ne suppose plus que P et Q commutent.

L'objectif de cette question est de montrer que $T = P - Q$ est encore une contraction.

a) Établir la relation :

$$\|Tx\|^2 = \langle (I-Q)x, Px\rangle + \langle (I-P)x, Qx\rangle\,.$$

b) Montrer que T est une contraction. En déduire que $\mathrm{Sp}(T) \subseteq [-1,1]$.

Solution :

1. a) Comme P et Q sont des matrices de projecteurs orthogonaux, elles sont symétriques.

La matrice T est donc symétrique puisqu'associé à un endomorphisme symétrique dans une base orthonormée.

b) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(T)$ et x un vecteur propre associé à λ. On a donc $\lambda x = Px - Qx$.

Si $Px = 0$, alors $-\lambda \in \mathrm{Sp}(Q) = \{0,1\}$ d'où la propriété demandée.

Si $Px \neq 0$, alors $\ker(Q - (1-\lambda)I) \neq 0$ et par conséquent $1 - \lambda \in \{0,1\}$.

Finalement, on a bien $\mathrm{Sp}(T) \subseteq \{-1,0,1\}$.

c) Comme T est symétrique réelle, elle est diagonalisable et il existe une base orthonormée $u_1,\cdots,u_n$ de vecteur propres pour T. Si $x \in \mathbb{R}^n$, notons $(x_1,\cdots,x_n)$ les coordonnées de x dans cette base.

On a donc $Tx = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k u_k$ avec $\lambda_k \in \{-1,0,1\}$. D'où $\|Tx\|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 x_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \|x\|^2$.

Donc T est une contraction.

d) Si T est une contraction stricte et x un vecteur propre associé à une valeur propre λ, alors on a :

$$|\lambda|\|x\| = \|Tx\| < \|x\|,\ \text{d'où } |\lambda| < 1$$

Comme $\lambda \in \{-1,0,1\}$, on a nécessairement $\lambda = 0$. Ainsi $\mathrm{Sp}(T) = \{0\}$ et comme T est diagonalisable, on a nécessairement $T = 0$ et donc $P = Q$.

2. a) Comme P et Q sont symétriques, il vient :

$$\begin{aligned}\|Tx\|^2 &= \langle (P-Q)x, (P-Q)x\rangle = \big\langle (P-Q)^2 x, x\big\rangle = \langle [(P+Q-PQ-QP)]\,x, x\rangle \\ &= \langle [(P(I-Q) + Q(I-P))]\,x, x\rangle = \langle (I-Q)x, Px\rangle + \langle (I-P)x, Qx\rangle\,.\end{aligned}$$

b) On voit que :

$$\begin{aligned}\|Tx\|^2 &\leqslant \|(I-Q)x\|\|Px\| + \|Qx\|\|(I-P)x\| \\ &\leqslant \sqrt{\|(I-Q)x\|^2 + \|Qx\|^2}\sqrt{\|(I-P)x\|^2 + \|Px\|^2} = \|x\|^2.\end{aligned}$$

Il en résulte que T est bien une contraction. La propriété $\mathrm{Sp}(T) \subseteq [-1,1]$ s'obtient avec un raisonnement analogue à celui qui a été utilisé dans la première partie de 1. d), (mais cette fois les inégalités sont prises au sens large).

Exercice 2.14.

Soit un entier $n \geqslant 2$. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique noté $\langle\ ,\ \rangle$ et de la norme euclidienne associée notée $||\ ||$. On identifie tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ avec la matrice colonne de ses coordonnées dans la base canonique.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

1. Justifier l'existence d'une base orthonormée $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ constituée de vecteurs propres de A associés respectivement à des valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ avec $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$.

On suppose désormais : $\lambda_1 > 0$

2. La matrice A est-elle inversible ?

3. Montrer que pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^n$, on a $\langle Au, u\rangle \geqslant \lambda_1 ||u||^2$.

4. En déduire que l'application $\phi : (u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \langle Au, v\rangle$ est un produit scalaire.

5. Soit b un vecteur non nul fixé dans $\mathbb{R}^n$. On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$f : u \mapsto \frac{1}{2}\langle Au, u\rangle - \langle u, b\rangle$$

a) Montrer que :

$$f(u) \geqslant \frac{1}{2}\lambda_1 ||u||^2 - ||b|| \cdot ||u||$$

En déduire que la fonction f est minorée. Est-elle majorée ?

b) Montrer que $f(\mathbb{R}^n)$ admet une borne inférieure négative ou nulle.

c) Montrer que, si $||u|| > \dfrac{2||b||}{\lambda_1}$ alors $f(u) \geqslant 0$.

En déduire que :

$$\inf\{f(\mathbb{R}^n)\} = \inf\{f(B_r)\}$$

où B_r est la boule fermée centrée en 0 et de rayon $r = \dfrac{2||b||}{\lambda_1}$

d) Montrer que la fonction f admet un minimum global.

Solution :

1. Par application du théorème spectral, on obtient une base orthonormée formée de vecteurs propres.

2. Le réel 0 n'est pas valeur propre donc A est inversible.

3. Soit $u \in \mathbb{R}^n$. Ce vecteur se décompose dans la base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sous la forme $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i e_i$. Ceci entraîne que

$$Au = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i e_i \Rightarrow \langle Au, u\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i^2 \geqslant \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \lambda_1.||u||^2$$

4. On montre successivement que ϕ est :
- symétrique : $\phi(v,u) = \langle Av, u\rangle = {}^t(Av)u = {}^tv{}^tAu = {}^tvAu = \langle v, Au\rangle = \langle Au, v\rangle = \phi(u,v)$.
- linéaire à gauche : $\phi(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1\phi(u_1,v) + \alpha_2\phi(u_2,v)$
- définie positive : $\phi(u,u) \geqslant \lambda_1||u||^2 \geqslant 0$ et $\phi(u,u) = 0 \Rightarrow \lambda_1||u||^2 = 0 \Rightarrow ||u||^2 = 0 \Rightarrow u = 0$

5. a) En utilisant le résultat de la question 2 : $\langle Au, u\rangle \geqslant \lambda_1||u||^2$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$f(u) = \frac{1}{2}\langle Au, u\rangle - \langle u, b\rangle \geqslant \frac{1}{2}\lambda_1||u||^2 - ||b||\ ||u||$$

La fonction f est minorée car la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{2}\lambda_1 t^2 - ||b||t$ est négative sur $\left[0, \dfrac{b}{\lambda_1}\right]$ et admet un minimum pour $t = \dfrac{||b||}{\lambda_1}$ d'où :

$$f(u) \geqslant \frac{1}{2}\lambda_1\frac{||b||^2}{\lambda_1^2} - ||b||\frac{||b||}{\lambda_1} = -\frac{||b||^2}{2\lambda_1}$$

La fonction f n'est pas majorée : pour $u = (x, 0, \ldots, 0)$, on a $||u||^2 = x^2$ d'où : $f(u) \geqslant \dfrac{1}{2}\lambda_1 x^2 - ||b||\ |x|$ d'où $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(u) = +\infty$

b) L'ensemble $f(\mathbb{R}^n)$ est minorée et admet donc une borne inférieure. Comme $f(0) = 0$ cette borne inférieure est négative ou nulle.

c) si $||u|| > \dfrac{2||b||}{\lambda_1}$ alors

$$\frac{1}{2}\lambda_1||u|| - ||b|| > 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\lambda_1||u||^2 - ||b||||u|| > 0 \Rightarrow f(u) \geqslant 0$$

On vient d'établir que $\inf(f(\mathbb{R}^n\backslash B_r)) \geqslant 0$ et on a vu dans la question 4.a) que $\inf(f(B_r)) \leqslant 0$.
D'où : $\inf(f(B_r)) \leqslant \inf(f(\mathbb{R}^n\backslash B_r)) \Rightarrow \inf\{f(\mathbb{R}^n)\} = \inf\{f(B_r)\}$.

d) La fonction f est continue sur le fermé borné B_r donc f est bornée sur B_r et atteint son minimum en un vecteur $u_0 \in B_r$.
Donc : $\forall u \in \mathbb{R}^n, f(u) \geqslant f(u_0)$. Ainsi f admet un minimum global en u_0.

Exercice 2.15.

Soit un entier $n \geqslant 2$. Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique associée au produit scalaire donné par $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ où $x = {}^t(x_1, \cdots, x_n)$ et $y = {}^t(y_1, \cdots, y_n)$; on note $\|.\|$ la norme associée.

Dans tout l'exercice, P et Q sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associées à des projecteurs et I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Donner un polynôme annulateur de degré 2 pour les matrices P et Q.

2. On pose : $T = P - Q$. Vérifier que $\mathrm{Im}(P) \cap \mathrm{Ker}(Q) \subseteq \mathrm{Ker}(T - I)$ et que $\mathrm{Im}(Q) \cap \mathrm{Ker}(P) \subseteq \mathrm{Ker}(T + I)$.

3. Dans cette question, on suppose que P (resp. Q) est la matrice d'un projecteur orthogonal p (resp. q).
a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\|QPx\|^2 = \langle PQPx|x\rangle$.
b) Soit $x \in \mathrm{Ker}(T - I)$, montrer $PQx = PQPx = 0$.
c) Prouver que $\mathrm{Ker}(T - I) = \mathrm{Im}(P) \cap \mathrm{Ker}(Q)$ et que $\mathrm{Ker}(T + I) = \mathrm{Im}(Q) \cap \mathrm{Ker}(P)$.

4. On revient au cas général où P et Q sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associées à des projecteurs et on suppose que pour tout x non nul de $\mathbb{R}^n$, on a $\|Tx\| < \|x\|$.
a) Montrer que $\mathrm{Im}(P) \cap \mathrm{Ker}(Q) = \mathrm{Im}(Q) \cap \mathrm{Ker}(P) = \{0\}$.
b) En déduire que le rang de P est égal au rang de Q.

5. Dans cette question, on prend pour P et Q les matrices suivantes :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que les inclusions données dans la question 2. peuvent être strictes.

Solution :

1. Le cours nous dit que $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de degré 2 pour les matrices P et Q.

2. La vérification est immédiate.

3. a) Dans ce cas, les matrices P et Q sont symétriques. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a donc

$$\|QPx\|^2 = \langle QPx|QPx\rangle = \left\langle PQ^2Px|x\right\rangle = \langle PQPx|x\rangle$$

b) Soit $x \in \mathrm{Ker}(T - I)$, on a donc $x = Px - Qx$ et par suite $Px = Px - PQx$, d'où $PQx = 0$. Il s'ensuit que $0 = PQx = PQPx - PQx = PQPx$.

c) Soit $x \in \mathrm{Ker}(T-I)$. D'après les deux questions précédentes on a $\|QPx\|^2 = \langle PQPx|x\rangle = 0$, d'où $QPx = 0$. Comme $x = Px - Qx$, on en déduit que $Qx = QPx - Qx = -Qx$, d'où $Qx = 0$ et par suite $Px = x$.
Dans ce cas, on a donc l'inclusion inverse $\mathrm{Im}(P) \cap \mathrm{Ker}(Q) \supseteq \mathrm{Ker}(T-I)$ et par suite l'égalité. On échange les rôles de P et Q pour obtenir la deuxième égalité.

4. a) Soit $x \in \mathrm{Ker}(T-I)$. Supposons x non nul, alors on doit avoir $\|x\| = \|Tx\| < \|x\|$ ce qui est absurde. Il en résulte que $\mathrm{Ker}(T-I) = \{0\}$ et avec la question 2, on a nécessairement $\mathrm{Im}(P) \cap \mathrm{Ker}(Q) = \{0\}$. Un raisonnement analogue prouve la deuxième égalité.

b) Les sous espaces $\mathrm{Im}(P)$ et $\mathrm{Ker}(Q)$ sont donc en somme directe. En utilisant le théorème du rang, il vient alors $n \geqslant \dim(\mathrm{Im}(P) \oplus \mathrm{Ker}(Q)) = \dim(\mathrm{Im}(P)) + \dim(\mathrm{Ker}(Q)) = \mathrm{rg}(P) + n - \mathrm{rg}(Q)$. D'où $\mathrm{rg}(P) \leqslant \mathrm{rg}(Q)$. En utilisant le fait que $\mathrm{Im}(Q)$ et $\mathrm{Ker}(P)$ sont aussi en somme directe, on trouve que $\mathrm{rg}(P) \geqslant \mathrm{rg}(Q)$ et donc l'égalité souhaitée.

5. On a $P^2 = P$ et $Q^2 = Q$, on peut donc affirmer avec le cours que P et Q sont bien les matrices de deux projecteurs. On voit que $\ker(P) = \mathrm{Vect}\,\{(0,1)\}$, $\ker(Q) = \mathrm{Vect}\,\{(1,-1)\}$, $\mathrm{Im}(P) = \mathrm{Vect}\,\{(1,1)\}$ et $\mathrm{Im}(Q) = \mathrm{Vect}\,\{(0,1)\}$.

On a $T = \mathrm{diag}(1,-1)$, par conséquent $\mathrm{Im}(P) \cap \mathrm{Ker}(Q) = \{0\} \subsetneq \mathrm{Ker}(T-I) = \mathrm{Vect}\,\{(1,0)\}$. Il suffit ensuite d'échanger les rôles de P et Q pour montrer que la deuxième inclusion de la question 2 peut être stricte.

Exercice 2.16.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Si L_1 et L_2 sont deux parties de l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on appelle *somme de L_1 et L_2, notée $L_1 + L_2$*, la partie de $\mathbb{C}$ définie par $L_1 + L_2 = \{s + t; s \in L_1 \text{ et } t \in L_2\}$.

1. On considère les matrices A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ données par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les spectres $\mathrm{Sp}(A)$, $\mathrm{Sp}(B)$ et $\mathrm{Sp}(A+B)$ et en déduire qu'en général le spectre de la somme de deux matrices n'est pas contenu dans la somme des spectres de ces matrices.

2. On considère deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent. On note u et v les endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ qui leur sont canoniquement associés. On pose : $w = u + v$.

a) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A+B) = \mathrm{Sp}(w)$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(w - \lambda Id_{\mathbb{C}^n})$ est un sous-espace stable par u et par v.

b) On note u_1 (resp. v_1) la restriction de u (resp. de v) au sous-espace E. On a donc u_1 et $v_1 \in \mathcal{L}(E)$.

Quelle relation a-t-on entre les endomorphismes u_1, v_1 et Id_E ?

c) Comme $E \neq \{0\}$, on choisit un vecteur non nul x dans E.

Établir l'existence d'un polynôme non nul p, de degré minimal, tel que $p(u_1)(x) = 0$.

d) Justifier l'existence d'un nombre complexe α pour lequel on a $p(X) = (X - \alpha)q(X)$, où q est un polynôme.

e) Montrer que $\alpha \in \mathrm{Sp}(u_1)$ et que $(\lambda - \alpha) \in \mathrm{Sp}(v_1)$. En conclure que $\mathrm{Sp}(A+B) \subseteq \mathrm{Sp}(A)+\mathrm{Sp}(B)$.

3. On considère une famille finie $\{P_1, \cdots, P_n\}$ $(n \geqslant 2)$ de matrices de projections qui commutent entre elles.

On pose $T = P_1 + \cdots + P_n$. Déterminer un sous-ensemble fini F sur lequel on peut se restreindre pour chercher les valeurs propres de T.

Solution :

1. Il est clair que $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(B) = \{0\}$. Comme $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, la matrice $A + B$ est symétrique. Sa trace est nulle et son déterminant vaut -1, on a donc $\mathrm{Sp}(A + B) = \{-1, 1\}$. Il est clair que $\mathrm{Sp}(A + B) \not\subseteq \mathrm{Sp}(A) + \mathrm{Sp}(B) = \{0\}$.

2. a) Soit $x \in E$, on a donc $\lambda x = u(x) + v(x)$. On voit que

$$\lambda u(x) = u^2(x) + u \circ v(x) = u^2(x) + v \circ u(x) = w(u(x))$$

d'où $u(x) \in E$. Le sous espace E est donc stable par u. De la même manière, on montre qu'il est stable par v.

b) Si $x \in E$, on a $\lambda x = u(x) + v(x) = u_1(x) + v_1(x)$. On a donc $u_1 + v_1 = \lambda Id_E$.

c) Soit m le plus petit entier pour lequel la famille

$$\{x, u_1(x), \cdots, u_1^m(x)\}$$

est liée (qui existe puisque l'on est en dimension finie).
Comme $x \neq 0$, on a $m \geqslant 1$, de plus il existe $(a_0, \cdots, a_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}$ tels que

$$a_m u_1^m(x) + \cdots + a_1 u_1(x) + a_0 x = 0$$

Le polynôme $p_1 = a_0 + a_1 X + \cdots + a_m X^m$ convient.

d) Comme le degré de p est supérieur où égal à 1, le théorème de d'Alembert-Gauss nous dit qu'il admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$. On peut donc l'écrire sous la forme $p(X) = (X - \alpha)q(X)$.

e) On a donc $0 = p(u_1(x)) = (u_1 - \alpha Id)(q(u_1)(x))$, de plus $q(u_1)(x) \neq 0$ car $q \neq 0$ et $d^\circ(q) < d^\circ(p)$. C'est donc un vecteur propre de u_1 associé à α.

On a bien $\alpha \in \mathrm{Sp}(u_1)$. D'après la question 2. b, on a $v_1 - (\lambda - \alpha)Id_E = \alpha Id_E - u_1$, il en découle que $\lambda - \alpha \in \mathrm{Sp}(v_1)$. D'où $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) + \mathrm{Sp}(B)$. L'inclusion souhaitée est prouvée.

3. la matrice P_k étant la matrice d'une projection, on a $Sp(P_k) \subset \{0, 1\}$. Comme la famille $\{P_1, \cdots, P_n\}$ $(n \geqslant 2)$ est commutative, une récurrence finie utilisant la question 2, nous donne

$$\mathrm{Sp}(T) \subseteq \mathrm{Sp}(P_1) + \cdots + \mathrm{Sp}(P_n) = \{0, 1, \cdots, n\}.$$

Exercice 2.17.

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$, $\mathcal{B}$ une base de E et f un endomorphisme non nul

de E. On note $M_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

1. Montrer que la trace de la matrice $M_{\mathcal{B}}(f)$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie.

Dans la suite, on note $\mathrm{tr}(f)$ ce réel.

2. Montrer que si $\mathrm{tr}(f) = 0$ alors f n'est pas une homothétie.

3. On suppose dans cette question que pour tout $x \in E$ il existe $\lambda_x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda_x\, x$.

Soit un vecteur $x_0 \in E$ fixé ; on note $\lambda = \lambda_{x_0}$. Montrer que pour tout $y \in E$, on a : $\lambda_y = \lambda$ (*on pourra étudier les cas où x_0 et y sont deux vecteurs libres ou liés*).

Que peut-on en déduire pour f ?

4. Dans cette question, on se place dans le cas particulier où $n = 2$. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice non

nulle de trace nulle. On note $\mathrm{rg}(A)$ le rang de la matrice A.

Montrer que A est semblable à une matrice dont les coefficients de la diagonale principale sont tous nuls en distinguant les deux situations :

- si $\mathrm{rg}(A) = 1$, justifier que A est semblable à une matrice $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$;
- si $\mathrm{rg}(A) = 2$, justifier que A est semblable à une matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$ où $\beta \in \mathbb{R}^*$.

5. Dans cette question, $\dim(E) = n + 1$. On note $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}$. On suppose que $\mathrm{tr}(A) = 0$.

a) Établir l'existence de $e_1 \in E$ tel que la famille $(e_1, f(e_1))$ soit libre.

On note alors $e_2 = f(e_1)$ et D la droite vectorielle engendrée par e_1.

b) Montrer l'existence d'une famille finie de $n-1$ vecteurs $e_3, \cdots, e_{n+1}$ tels que l'hyperplan H engendré

par $\{e_2, e_3, \cdots, e_{n+1}\}$ soit un supplémentaire de D.

c) On note p la projection sur H parallèlement à D. On pose pour tout $y \in H, g(y) = p(f(y))$.

Montrer que g ainsi défini est un endomorphisme de H de trace nulle.

d) Montrer par récurrence sur n, que si $\mathrm{tr}(f) = 0$, alors il existe une base de E telle que la matrice de f dans cette base a tous ses coefficients de la diagonale principale nuls.

Solution :

1. Soit $\mathcal{B}_1$ une autre base de E. On note $B = M_{\mathcal{B}_1}(f)$. Alors $A = PBP^{-1} \Rightarrow \text{tr}(A) = tr(BPP^{-1}) = \text{tr}(B)$ est indépendante de la base choisie.

2. Si f (non nulle) est une homothétie de rapport $\lambda \neq 0$, alors $\text{tr}(f) = n\lambda \neq 0$.

3. a) Si y et x_0 sont liés : $y = \mu x_0 \Rightarrow \lambda_y y = \mu\lambda x_0 = \lambda.y \Rightarrow \lambda_y = \lambda$.
Si y et x_0 sont libres : $\lambda_{x_0+y}(x_0 + y) = \lambda x_0 + \lambda_y y$ et $(\lambda_{x_0+y} - \lambda)x + (\lambda_{x_0+y} - \lambda_y)y = 0 \Rightarrow \lambda_{x_0+y} = \lambda_y = \lambda$.
On a établi que pour tout $y \in E$, $f(y) = \lambda y$ ce qui est la définition d'une homothétie.

4. Pour $n = 2$, la matrice s'écrit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & -a \end{pmatrix}$.

• si $\text{rg}(A) = 1$ alors $a^2 + bc = 0$. Soit $e_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. On a : $\text{Im}(A) = \text{Ker}(A) = \text{Vect}\{e_1\}$ Soit e_2 un vecteur de E non lié à e_1, on a $f(e_2) \in \text{Im}(A)$ d'où $f(e_2) = \alpha e_1$. En se plaçant dans la base (e_1, e_2), la matrice A est semblable à une matrice $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $\alpha > 0$.

• si $\text{rg}(A) = 2$, alors $a^2 + bc \neq 0$ Par la question 3, il existe e_1 tel que $(e_1, f(e_1))$ soit une base de E. Ainsi $f(f(e_1)) = (a^2 + bc)e_1$ donc A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a^2 + bc & 0 \end{pmatrix}$ où $a^2 + bc \in \mathbb{R}^*$.

5. a) Par la question 3, il existe e_1 tel que $(e_1, f(e_1))$ soit libre dans E. On note $e_2 = f(e_1)$. La famille $\{e_1, e_2\}$ peut être complétée en $\{e_1, e_2, e_3, \cdots e_{n+1}\}$ base de E. Par définition l'hyperplan H engendré par $\{e_2, e_3, \cdots, e_{n+1}\}$ est un supplémentaire de D dans E.

b) Ainsi défini, $g(y)$ est unique dans H. La linéarité de p et de f entraîne celle de g c'est bien un endomorphisme de H.

c) La matrice de f dans la base $\{e_1, \cdots, e_{n+1}\}$ peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 1 & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & a_{2,3} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n+1,2} & \cdots & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$$

La matrice de g dans la base $\{e_2, e_3, \cdots, e_{n+1}\}$ s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{2,n} \\ a_{2,3} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n+1,2} & \cdots & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$$

D'où $\text{tr}(g) = \text{tr}(f) = 0$

d) Procédons par récurrence sur n.

Pour $n = 2$ le résultat a déjà été établi lors de la question 4.

On suppose le résultat établi au rang $n > 2$; montrons qu'il est encore vrai au rang $n+1$.
On note $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}$. On suppose $\text{tr}(A) = 0$. On a montré que $g \in \mathcal{L}(H)$ avec $dim(H) = n$ et $\text{tr}(g) = 0$. En appliquant l'hypothèse de récurrence on a l'existence d'une base de H $\{u_2, \cdots, u_{n+1}\}$ telle que la matrice de g dans cette base ait tous ses coefficients de la diagonale principale nuls. On se place dans la base $\{u_1 = e_1, u_2, \cdots, u_{n+1}\}$ de E, on note : $f(u_j) = \sum_{i=1}^{n+1} b_{i,j} u_j$. Alors

• $f(u_1) = f(e_1) = e_2 \in H = \text{Vect}\{u_2, \cdots, u_{n+1}\}$ donc $b_{1,1} = 0$.

• pour $2 \leqslant j \leqslant n+1$, on a : $g(u_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} b_{i,j} p(u_j) = \sum_{i=2}^{n+1} b_{i,j} u_j$ (car $p(u_1) = 0$). L'hypothèse de récurrence entraîne : $b_{j,j} = 0$ pour tout $j \in [\![2, n]\!]$.

On a montré que la matrice de f a tous ses coefficients de la diagonale principale nuls. Ce qui achève la démonstration.