1

ANALYSE

Exercice 1.01.

Pour tout entier $p \geqslant 1$, on définit la fonction f_p sur $[1, +\infty[$, par

$$f_p(t) = \frac{1}{t(t+1)\cdots(t+p)}$$

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_p(t)\ \mathrm{d}t$ converge. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose alors :

$$I_p = \int_1^{+\infty} f_p(t)\ \mathrm{d}t$$

2. Pour tout $t \in [1, +\infty[$, étudier la convergence de la suite $(f_p(t))_{p\geqslant 1}$.

3. Déterminer la limite éventuelle de la suite $(I_p)_{p\geqslant 1}$.

4. Pour p fixé, *on admet* l'existence de nombres réels $\alpha_0, \ldots, \alpha_p$ tels que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \setminus [\![-p, 0]\!],\ f_p(t) = \sum_{k=0}^{p} \frac{\alpha_k}{t+k}.$$

Montrer que pour tout $j \in [\![0, p]\!]$, on a : $\alpha_j = \dfrac{(-1)^j}{j!(p-j)!}$.

Pour tout $j \in [\![0, p]\!]$, on pourra multiplier la relation admise par $(t+j)$ et choisir une valeur particulière de t.

5. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \alpha_k$ et en déduire une expression de I_p, sans intégrale, sous la forme d'une somme.

Solution :

1. La fonction f_p est continue sur $[1,+\infty[$, donc la convergence ne pose problème qu'en $+\infty$. En $+\infty$, on a : $0 \leqslant f_p(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{p+1}}$. D'où la convergence par comparaison avec l'intégrale convergente $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{p+1}}$ (puisque $p+1 \geqslant 2 > 1$).

2. Pour tout $t \geqslant 1$ et tout $i \in [\![0,p]\!]$, on a $t+i \geqslant i+1$, donc $0 \leqslant f_p(t) \leqslant \dfrac{1}{(p+1)!}$. Donc, par théorème d'encadrement, on obtient : $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} f_p(t) = 0$.

3. De même que précédemment, en mettant à part les deux premiers facteurs, on a :

$$0 \leqslant f_p(t) \leqslant \frac{1}{t(t+1)\times 3\times\cdots\times(p+1)} = \frac{1}{t(t+1)}\times\frac{2}{(p+1)!} \leqslant \frac{1}{t^2}\times\frac{2}{(p+1)!}.$$

Par croissance de l'intégration, comme les deux intégrales convergent, on en déduit :

$$0 \leqslant I_p \leqslant \frac{2}{(p+1)!}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

Donc, par théorème d'encadrement, on obtient : $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} I_p = 0$.

4. Pour tout $j \in [\![0,p]\!]$, en multipliant la relation admise par $t+j$, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}\setminus[\![-p,0]\!],\ \frac{1}{t(t+1)\cdots(t+j-1)(t+j+1)\cdots(t+p)} = \alpha_j + \sum_{k=0,k\neq j}^{p}\frac{\alpha_k(t+j)}{t+k}.$$

En faisant tendre t vers $-j$ (puisque les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{t+k}$ sont continues sur $\mathbb{R}\setminus[\![-p,0]\!]$), on obtient :

$$\alpha_j = \frac{1}{(-j)(-j+1)\cdots(-1)(1)\cdots(p-j)} = \frac{(-1)^j}{j!(p-j)!}.$$

5. D'après la formule du binôme, on a :

$$\sum_{k=0}^{p}\alpha_k = \frac{1}{p!}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}(-1)^k = \frac{(1-1)^p}{p!} = 0$$

On peut également écrire $tf_p(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p}\frac{t\alpha_k}{t+k}$, puis faire tendre t vers $+\infty$.

On ne peut pas écrire $I_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p}\alpha_k\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t+k}$ car ces intégrales divergent toutes. Donc, plus prudemment, pour tout $X > 1$, on a :

$$\begin{aligned}\int_1^X f_p(t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{k=0}^{p} \alpha_k \int_1^X \frac{\mathrm{d}t}{t+k}\\ &= \sum_{k=0}^{p} \alpha_k \ln\left(\frac{X+k}{1+k}\right) = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k \left(\ln X + \ln\left(1+\frac{k}{X}\right) - \ln(1+k)\right)\\ &= \ln X \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{p} \alpha_k\right)}_{=0} + \sum_{k=0}^{p} \alpha_k \left(\ln\left(1+\frac{k}{X}\right) - \ln(1+k)\right)\\ &\underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} -\sum_{k=0}^{p} \alpha_k \ln(1+k) = I_k.\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{Exercice 1.02.}}$

Soit un entier $n \geqslant 2$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique $\langle\ ,\ \rangle$ et de la norme euclidienne $||\ ||$ associée.

On dit qu'une matrice symétrique A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est positive (resp. définie positive) si son spectre $\mathrm{Sp}(A)$ est contenu dans $\mathbb{R}_+$ (resp. $\mathbb{R}_+^*$).

On admet qu'une matrice A est positive (resp. définie positive) si et seulement si le produit scalaire $\langle Ax, x\rangle$ est positif pour tout x de $\mathbb{R}^n$ (resp. strictement positif pour tout x de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$).

On admet également que si A est une matrice positive, alors $\langle Ax, x\rangle = 0$ si et seulement si $x \in \mathrm{Ker}(A)$.

1. Soit $u = (u_1, u_2)$ un point de $\mathbb{R}^2$. On définit la fonction f_u sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall\,(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ f_u(x_1, x_2) = \|x - u\| = \sqrt{(x_1-u_1)^2 + (x_2-u_2)^2}.$$

a) On note O_u l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{u\}$. Justifier que f_u est de classe C^2 sur O_u.

b) Déterminer le gradient de f_u en tout point $x = (x_1, x_2) \in O_u$.

c) Déterminer la matrice hessienne $\nabla^2(f_u)(x)$ en tout point x de O_u.

Montrer que $\nabla^2(f_u)(x)$ n'est pas inversible. Déterminer $\mathrm{Sp}\left(\nabla^2(f_u)(x)\right)$.

d) Soit $x \in O_u$. Montrer que $\nabla^2(f_u)(x)$ est positive et que $h = (h_1, h_2)$ appartient au noyau de $\nabla^2(f_u)(x)$ si et seulement si h appartient à la droite d'équation $(x_2 - u_2)y_1 = (x_1 - u_1)y_2$.

2. Soit a, b, c trois points non alignés de $\mathbb{R}^2$. On note O l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{a, b, c\}$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x) = f_a(x) + f_b(x) + f_c(x)$.

On admet que f admet un minimum global et on suppose dans toute la suite que ce minimum global n'est pas atteint en l'un des points a, b et c.

a) Montrer que si $m = (m_1, m_2)$ est un point où ce minimum global est atteint, alors on a :

$$\frac{1}{f_a(m)}(m-a) + \frac{1}{f_b(m)}(m-b) + \frac{1}{f_c(m)}(m-c) = 0_{\mathbb{R}^2}.$$

b) Prouver que la hessienne $\nabla^2(f)(x)$ est définie positive en tout point x de O.

c) Supposons que x et y sont deux points distincts où le minimum global est atteint.

Pour $t \in [0,1]$, on pose $g(t) = f((1-t)x+ty) = f(x+t(y-x))$. En utilisant l'inégalité triangulaire pour la norme, montrer que g est constante. Vérifier que le segment de droite $[x,y] = \{(1-t)x+ty\,;\, t \in [0,1]\}$ est contenu dans O. Trouver alors une contradiction. Conclure.

Solution :

1. a) La fonction $t \longrightarrow \sqrt{t}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^{*+}$ et la fonction $(x_1,x_2) \longrightarrow (x_1-u_1)^2+(x_2-u_2)^2$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

Par composition, on voit que la fonction f_u est de classe C^∞ sur O_u.

b) On trouve : $\nabla(f_u)(x) = \dfrac{1}{f_u(x)}(x_1-u_1, x_2-u_2)$.

c) On obtient :

$$\nabla^2(f_u)(x) = \frac{1}{f_u(x)^3}\begin{pmatrix} (x_2-u_2)^2 & -(x_1-u_1)(x_2-u_2) \\ -(x_1-u_1)(x_2-u_2) & (x_1-u_1)^2 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de f_u est clairement nul, par conséquent la matrice $\nabla^2(f_u)(x)$ n'est pas inversible.

On vient de voir que $0 \in \mathrm{Sp}\left(\nabla^2(f_u)(x)\right)$; on trouve la deuxième valeur propre de cette matrice symétrique réelle en calculant sa trace. D'où :

$$\mathrm{Sp}\left(\nabla^2(f_u)(x)\right) = \left(0, \frac{1}{f_u(x)}\right)$$

d) Soit $x \in O_u$. La matrice $\nabla^2(f_u)(x)$ est positive car son spectre est inclus dans $\mathbb{R}_+$.

Le système $\nabla^2(f_u)(x)(h) = 0$ est clairement équivalent ($x \in O_u$) à $(x_2-u_2)h_1-(x_1-u_1)h_2 = 0$, c'est-à-dire que h appartient à la droite d'équation $(x_2-u_2)y_1 = (x_1-u_1)y_2$.

2. Montrons l'existence du minimum global de f. On voit que $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty} \|f(x)\| = +\infty$. Il existe donc un boule fermée B centrée en 0 en dehors de laquelle $f(x) > f(0)$. La fonction f étant positive, on en déduit alors que :

$$0 \leqslant \inf\left\{f(x); x \in \mathbb{R}^2\right\} = \inf\left\{f(x); x \in B\right\}$$

qui est atteint en un point de B puisque f est continue.

a) Un point $m = (m_1, m_2)$ où le minimum global est atteint appartient nécessairement à O d'après l'hypothèse. Alors on doit avoir : $0 = \nabla(f)(m) = \nabla(f_a)(m) + \nabla(f_b)(m) + \nabla(f_c)(m)$, ce qui donne bien la relation voulue.

b) Comme

$$\left\langle \nabla^2(f)(m)h, h\right\rangle = \left\langle \nabla^2(f_a)(m)h, h\right\rangle + \left\langle \nabla^2(f_b)(m)h, h\right\rangle + \left\langle \nabla^2(f_c)(m)h, h\right\rangle,$$

on voit avec la question 1. c) et la première propriété admise au début de l'énoncé que la matrice hessienne $\nabla^2(f)(x)$ est positive en tout point x de O.

c) Maintenant, comme la somme ci-dessus est un somme de termes positifs, elle est nulle si et seulement si chacun des termes est nul. Ce qui revient à dire, d'après la deuxième propriété admise au début de l'énoncé et la question 1. d), que h appartient au noyau de $\nabla^2(f)(m)$ si et seulement si :

$$(m_2 - a_2)h_1 = (m_1 - a_1)h_2,\ (m_2 - b_2)h_1 = (m_1 - b_1)h_2 \ \text{ et } \ (m_2 - c_2)h_1 = (m_1 - c_1)h_2$$

Si on suppose $h \neq 0$, alors, a, b et c appartiennent à la droite d'équation $(m_2 - y_2)h_1 = (m_1 - y_1)h_2$, ce qui est contradictoire. La hessienne $\nabla^2(f)(x)$ est donc définie positive. Avec l'inégalité triangulaire vérifiée par la norme, on voit que l'on doit avoir

$$f(x) = f(y) \leqslant g(t) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y) = f(x)$$

La fonction g est donc constante sur $[0, 1]$.

Comme le minimum global n'est pas atteint en l'un des points a, b et c, on a nécessairement $[x, y] \subseteq O$.

Le cours nous dit alors que $g''(t) = \left\langle \nabla^2(f)(x + t(y-x))(y-x), y-x \right\rangle > 0$ car $x \neq y$; on aboutit donc à une contradiction. Il y a donc un unique point où le minimum global est atteint.

Exercice 1.03.

Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\int_n^{n+1} f(t)\,dt = f(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t)f'(t)\,dt$$

2. On suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f'(t)\,dt$ converge absolument.

a) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,dt - f(n)$. Quelle est la nature de la série de terme général v_n ?

b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\displaystyle\int_1^n f(t)\,dt\right)_{n\geqslant 1}$ converge.

3.a) À l'aide du changement de variable $u = \sqrt{x}$, établir l'égalité :

$$\int_1^n \frac{\cos(\sqrt{x})}{x}\,dx = 2\int_1^{\sqrt{n}} \frac{\cos(u)}{u}\,du$$

b) Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(\sqrt{n})}{n}$.

4. Montrer l'existence d'un réel ℓ qui vérifie la relation : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} = \frac{\ln^2(n)}{2} + \ell + o(1)$.

Solution :

1. Puisque f est de classe C^1, sur $[1,+\infty[$, elle admet une primitive F qui est de classe C^2. On peut ainsi appliquer à F la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1,

$$\int_n^{n+1} f(t)\,dt = F(n+1)-F(n) = F'(n)+\int_n^{n+1}(n+1-t)F''(t)\,dt = f(n)+\int_n^{n+1}(n+1-t)f'(t)\,dt$$

2. a) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,dt - f(n)$. En utilisant la question précédente, on a

$$|v_n| \leqslant \int_n^{n+1} |n+1-t||f'(t)|\,dt \leqslant \int_n^{n+1} |f'(t)|\,dt$$

Ainsi, soit $N\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}|v_k| \leqslant \int_1^{N+1}|f'(t)|\,dt \leqslant \int_1^{+\infty}|f'(t)|\,dt$. Par la convergence absolue de l'intégrale, on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge absolument.

b) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\int_1^{n+1} f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} v_k + \sum_{k=1}^{n} f(k)$. De plus, puisque $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} v_k$ converge, on en déduit l'équivalence entre la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f(n)$ et celle de la suite $\left(\displaystyle\int_1^n f(t)\right)_{n\geqslant 1}$ converge.

3. Soit la fonction $f : x\mapsto \dfrac{\cos(\sqrt{x})}{x}$. La fonction f est bien C^1 sur $[1,+\infty[$, de dérivée sur $[1,+\infty[$,

$$f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}\sin(\sqrt{x}) - \frac{1}{x^2}\cos(\sqrt{x})$$

Or $\dfrac{1}{2x\sqrt{x}} \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$ et $\dfrac{1}{x^2}\cos(\sqrt{x}) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$.

On en déduit, en utilisant les règles de comparaison de Riemann, que $\displaystyle\int_1^{+\infty}|f'(t)|\,dt$ converge absolument.

En appliquant la question 2, on en déduit qu'il suffit de montrer la convergence de la suite $\left(\displaystyle\int_1^n f(t)\,dt\right)_{n\geqslant 1}$ pour conclure. Or à l'aide d'un changement de variable, $u(x)=\sqrt{x}$, fonction de classe C^1, bijective, strictement croissante, de $[1,+\infty[$ dans $[1,+\infty[$, il vient $\displaystyle\int_1^n \frac{\cos(\sqrt{x})}{x}\,dx = 2\int_1^{\sqrt{n}}\frac{\cos(u)}{u}\,du$.

Effectuons une intégration par parties aux fonctions $u\mapsto\sin(u)$ et $u\mapsto\dfrac{1}{u}$, toutes deux C^1 sur $[1,+\infty[$. Ainsi, $\displaystyle\int_1^{\sqrt{n}}\frac{\cos(u)}{u}\,du = \left[\frac{\sin(u)}{u}\right]_1^{\sqrt{n}} + \int_1^{\sqrt{n}}\frac{\sin(u)}{u^2}\,du.$

Or $\displaystyle\int_1^{\sqrt{n}} \frac{\sin(u)}{u^2}\,du$ converge, de même que le crochet, donc la suite $\displaystyle\left(\int_1^n f(t)\,dt\right)_{n\geqslant 1}$ converge. Ainsi, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(\sqrt{n})}{n}$ converge.

4. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$, vérifie bien les hypothèses. En effet, elle est C^1 sur $[1,+\infty[$, de dérivée, $f'(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\ln(x)}{x^2}$. Comme précédemment, puisque $\dfrac{\ln(x)}{x^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$, on en déduit par théorème de comparaison et par les intégrales de Riemann, que $\displaystyle\int_1^n |f'(t)|\,dt$ converge. Ainsi, en revenant à la démonstration du 2.b) et aux notations de la question 2.a), on a montré que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} v_k$ converge, donc il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}^{n} v_k \underset{+\infty}{=} \ell + o(1)$. Finalement, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} = \int_1^{n+1} f(t)dt + \ell + o(1) = \frac{\ln^2(n)}{2} + \ell + o(1)$.

Exercice 1.04.

Soit A et λ deux réels strictement positifs. Soit $I = [0, A]$.

1. Soit $t \in \mathbb{R}_+$ et $(u_n(t))_{n\geqslant 1}$ la suite définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n(t) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\, e^{n\lambda t}$$

Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n(t)$ est convergente et calculer sa somme $\displaystyle S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)$.

2. On pose $\displaystyle R_n(t) = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(t)$. Soit f une fonction continue sur I à valeurs réelles.

a) Montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $t \in I$, on a :

$$|f(t)R_n(t)| \leqslant \frac{M}{n!} e^{n\lambda A} \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{e^{q\lambda A}}{q!}$$

b) En déduire l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \int_0^A e^{k\lambda t} f(t)dt = \int_0^A \big(1 - \exp(-e^{\lambda t})\big)\, f(t)dt$$

3. Soit $t \in \mathbb{R}^+$. Déterminer $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} \big(1 - \exp(-e^{\lambda t})\big)$.

4. En découpant l'intervalle $[0, A]$ en deux intervalles $[0, \delta]$ et $[\delta, A]$, avec $\delta > 0$ judicieusement choisi, montrer

que l'on a :

$$\int_0^A f(t)dt = \lim_{\lambda \to +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \int_0^A e^{k\lambda t} f(t)dt$$

Solution :

1. On reconnaît une série exponentielle. Ainsi :

$$S(t) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) = 1 - \exp(-e^{\lambda t})$$

2. a) La fonction f est continue donc bornée par M sur le segment $[0, A]$. Ainsi :

$$\begin{aligned} |f(t)R_n(t)| &\leqslant M \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{k\lambda t}}{k!} \\ &\leqslant \frac{M}{n!} e^{n\lambda A} \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{e^{q\lambda A}}{q!} \\ &= C_\lambda \times \frac{M e^{n\lambda A}}{n!} \end{aligned}$$

Cette dernière quantité tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ indépendamment de t.
b) On écrit : (S_{n-1} représente la somme partielle d'ordre $n-1$ de la série S)

$$\int_0^A f(t)S(t)dt = \int_0^A f(t)S_{n-1}(t)dt + \int_0^A f(t)R_n(t)dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^A u_k(t)f(t)dt + \int_0^A f(t)R_n(t)dt$$

et

$$\left| \int_0^A f(t)R_n(t)dt \right| \leqslant A \times C_\lambda \times \frac{M e^{n\lambda A}}{n!}$$

Il reste à faire tendre n vers $+\infty$.

3. On a

$$\lim_{\lambda \to +\infty} 1 - \exp(-e^{\lambda t}) = \begin{cases} 1 - e^{-1} & \text{si } t = 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

4. Soit $\varepsilon > 0$. Nous allons évaluer la différence

$$\int_0^A f(t)dt - \int_0^A (1 - \exp(-e^{\lambda t}))f(t)dt$$

Pour $\delta > 0$:

$$\left| \int_0^\delta (\exp(-e^{\lambda t}))f(t)dt \right| \leqslant M(e^{-1})\delta < M\delta$$

On choisit alors $0 < \delta < \varepsilon/(2M)$.

De plus
$$\left|\int_\delta^A (\exp(-e^{\lambda t}))f(t)dt\right| \leqslant (\exp(-e^{\lambda\delta}))AM$$
Cette dernière quantité tend vers 0 lorsque λ tend vers $+\infty$. Il existe Λ tel que si $\lambda > \Lambda$, cette quantité est inférieure à $\varepsilon/2$.

Il reste à regrouper les deux sommes pour conclure.

Exercice 1.05.

On pose pour tout n entier naturel : $a_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\sqrt{1-t^2}\,dt$.

1.a) Montrer que la suite (a_n) est décroissante. En déduire qu'elle converge.

b) À l'aide du changement de variable $t = \sin u$, calculer a_0.

2. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $(n+4)a_{n+2} = (n+1)a_n$.

b) Soit (w_n) la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = n(n+1)(n+2)a_n a_{n-1}$.
Montrer que la suite (w_n) est constante et calculer cette constante.

c) Montrer que $a_n \underset{+\infty}{\sim} a_{n+1}$.

d) Établir l'existence d'un réel $K > 0$ que l'on calculera, tel que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{K}{n^{3/2}}$.

e) En déduire la nature de la série de terme général $b_n = (-1)^n a_n$.

3.a) Montrer que l'on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^n b_k = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt$.

b) En utilisant le changement de variable $u = \sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}$, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt$.
Quelle est la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} b_n$?

Solution :

1. On remarque que ces intégrales ne sont pas généralisées, mais intégrales de fonctions continues sur un segment.
La suite (a_n) est décroissante car pour $t \in [0,1]$, on a $0 \leqslant t^{n+1} \leqslant t^n$ (puis on utilise la positivité de l'intégrale) et $a_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite (a_n) converge.

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Effectuons une intégration par parties dans a_{n+2}. Les fonctions en jeu étant de classe C^1 sur $[0,1]$, il vient :

$$a_{n+2} = \left[-t^{n+1}\frac{1}{3}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 + \frac{(n+1)}{3}\int_0^1 t^n(1-t^2)\sqrt{1-t^2}\,dt \Rightarrow a_{n+2} = \frac{n+1}{3}(a_n - a_{n+2})$$

soit : $(n+4)a_{n+2} = (n+1)a_n$.

b) Calculons $w_{n+1} = (n+1)(n+2)(n+3)a_{n+1}a_n = (n+2)(n+3)a_{n+1}(n+4)a_{n+2} = w_{n+2}$, d'après la question précédente et la définition de la suite w. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = w_{n+2} = w_1 = 6a_1a_0$.

Or :

$$a_0 = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\,du = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(2u)+1)\,du = \frac{\pi}{4}, \text{en posant } t = \sin u$$

Et

$$a_1 = \int_0^1 t\sqrt{1-t^2}\,dt = -\frac{1}{3}\left[\left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \dfrac{\pi}{2}$.

c) D'après les deux premières questions, on a pour tout entier naturel n :

$$0 < a_{n+2} = \frac{n+1}{n+4}a_n < a_{n+1} < a_n$$

Le théorème d'encadrement permet alors de conclure que $a_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n$.

d) En combinant les résultats des deux dernières questions, on obtient $n^3 a_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}$.

Rappelons aussi que $a_n > 0$. Ainsi : $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\; n^{-3/2}$.

e) Par le critère des séries de Riemann, les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont donc absolument convergentes.

3. a) Il vient :

$$\sum_{k=0}^{n} b_k = \int_0^1 \frac{1-(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}\sqrt{1-t^2}dt = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}dt + (-1)^n \int_0^1 t^{n+1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}dt$$

La fonction $t \to \sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}dt$ est continue sur $[0,1]$ donc majorée par une constante M. Ainsi :

$$0 \leqslant \int_0^1 t^{n+1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}dt \leqslant \frac{M}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

b) Effectuons le changement de variable C^1 (et bijectif) sur $[0,x]$ pour $0 < x < 1$, $u = \sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}$, $u^2 = \dfrac{1-t}{1+t}$, $t(u^2+1) = 1-u^2$ donc $t = \dfrac{1-u^2}{1+u^2} = -1 + \dfrac{2}{1+u^2}$ et $dt = \dfrac{-4u}{(1+u^2)^2}du$. Ainsi :

$$B_x = \int_0^x \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt = \int_1^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \frac{-4u^2}{(1+u^2)^2}du$$

Effectuons une intégration par parties. On a :

$$B_x = \left[2u\frac{1}{1+u^2}\right]_1^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} - 2\left[\arctan(u)\right]_1^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} -1+\frac{\pi}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

Exercice 1.06.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f:(x,y)\mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2\,y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}.$$

Soit D l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ défini par $D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

1. Justifier que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. a) Justifier que f est de classe C^2 sur D et déterminer son gradient en tout point de D.
b) Expliciter le développement limité à l'ordre 1 de f au point $a=(1,1)$.

3. Déterminer les extrema locaux et globaux de f sur D, s'il y en a.

4. Déterminer les extrema de f sur l'ensemble $\mathcal{C}=\big\{(x,y)\in D\,,x^2+y^2=2\big\}$.

5. La fonction f admet elle des extrema sur l'ensemble $\mathcal{B}=\big\{(x,y)\in D\,,x^2+y^2\leqslant 2\big\}$?

6. Vérifier à l'aide du développement limité de f à l'ordre 1 que le point $a=(1,1)$ n'est pas un maximum local de f sur D.

Solution :

1. On a $0\leqslant |f(x,y)|\leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2}\right)\to 0$ lorsque $||(x,y)||\to 0$. Donc f est bien continue en $(0,0)$.

2.a) La fonction $f\in C^2(D,\mathbb{R})$ comme fraction rationnelle, et

$$\forall (x,y)\in D,\quad \nabla(f)(x,y)=\left(\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}\,,\,\frac{2yx^4}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

b) Le DL_1 en a est :

$$f\big(1+u,1+v\big)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,u+\frac{1}{2}\,v+o\big(||(u,v)||\big)$$

3. Les points critiques de f sont obtenus pour $(0,y)$ ou $(x,0)$; comme f est positive sur D, ce sont des minima globaux.

D'autre part, $f(x,x)=\dfrac{x^2}{2}\to\infty$ lorsque $x\to\infty$; donc f n'est pas majorée.

4. On a :

$$g(x,y)=x^2+y^2-2\Rightarrow\nabla(g)(x,y)=(2x,2y)\neq 0 \text{ sur } D$$

Il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases}\left(\dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2},\dfrac{2yx^4}{(x^2+y^2)^2}\right)=\lambda\,(2x,2y)\\ x^2+y^2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\,(y^4-4\lambda)=0\\ y\,(x^4-4\lambda)=0\\ x^2+y^2=2\end{cases}$$

D'où les points critiques :

- $x=0\Rightarrow y=\pm\sqrt{2}$ et $\lambda=0$, d'où $A:(0,-\sqrt{2})$ et $A':(0,\sqrt{2})$;
- $y=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$ et $\lambda=0$, d'où $B:(-\sqrt{2},0)$ et $B':(\sqrt{2},0)$;
- $xy\neq 0\Rightarrow x^4=4\lambda=y^4\Rightarrow x=\pm y$ puis $x^2=1$ et $\lambda=1/4$ d'où $F:(1,1)$, $F':(-1,-1)$ et $G:(1,-1)$, $G':(-1,1)$.

La fonction f est continue sur $\mathcal{C}$ fermé borné, donc admet des extrema globaux atteints sur $\mathcal{C}$, qui sont :

$$f(A)=f(A')=f(B)=f(B')=0\quad\text{et}\quad f(F)=f(F')=f(G)=f(G')=\frac{1}{2}$$

5. Sur l'ouvert $\mathcal{B}'=\mathcal{B}\setminus\mathcal{C}=\Big\{(x,y)\in D,\ x^2+y^2<2\Big\}$, f n'a pas de maximum local mais des minima globaux (nuls) aux points tels que $x=0$ ou $y=0$.

Donc f a des maxima globaux sur $\mathcal{B}$ en F,F',G,G' de valeur $\dfrac{1}{2}$ et des minima globaux nuls aux points tels que $x=0$ ou $y=0$.

6. On a :

$$f\big(1+u,1+0\big)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\,u+o\big(||(u,v)||$$

qui change de signe comme u au voisinage de 0.

Exercice 1.07.

Soit E l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes pour lesquelles il existe un entier naturel N tel que :

$$\forall\,k\geqslant N, u_k\neq\lim u_n$$

À toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E , de limite égale à ℓ, on associe la suite $(u_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ définie à partir d'un certain rang par :

$$u_n^*=\left|\frac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell}\right|$$

On note E^* l'ensemble des éléments $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E pour lesquels la suite (u_n^*) est convergente.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E^* et ℓ^* la limite de $(u_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$. On admet que $\ell^*\in[0,1]$.

- si $\ell^* = 1$, on dit que la vitesse de convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est lente ;
- si $\ell^* \in]0,1[$, on dit que la vitesse de convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de rapport ℓ^* ;
- si $\ell^* = 0$, on dit que la vitesse de convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est rapide.

1. a) Montrer que la suite $\left(\dfrac{1}{n!}\right) \in E^*$ et donner sa vitesse de convergence.

b) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \left(1 + \dfrac{1}{2^n}\right)^{2^n}$.

i) Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a $v_n = e - \dfrac{e}{2^{n+1}} + o\Big(\dfrac{1}{2^n}\Big)$.

ii) Montrer que la suite $(v_n) \in E^*$ et donner sa vitesse de convergence.

2. Soit $\alpha > 1$. La série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ converge et a pour somme le réel ℓ.

On pose $S_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^\alpha}$.

a) Montrer que pour $n \geqslant 1$, on a : $\dfrac{1}{\alpha - 1} \times \dfrac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant \ell - S_n \leqslant \dfrac{1}{\alpha - 1} \times \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$.

b) En déduire que $(S_n) \in E^*$ et donner sa vitesse de convergence.

3. Soit X une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et α un réel strictement positif.
On dit que X admet un *moment exponentiel d'ordre* α si la variable aléatoire $e^{\alpha|X|}$ est d'espérance finie.

a) On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Déterminer les réels $\alpha > 0$ pour lesquels X admet un moment exponentiel d'ordre α et calculer ce moment

dans ce cas.

b) On suppose que $X(\Omega) = \{(x_p)_{p\in\mathbb{N}}\}$. Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi que X. Pour tout entier $n > 0$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.
Soit $\alpha > 0$. On suppose que X admet un moment exponentiel d'ordre α.

i) Montrer que pour tout réel u, on a : $e^u \geqslant 1 + u \geqslant u$.

ii) Montrer que X admet une espérance finie notée m et une variance notée σ^2.

iii) Soit un réel $\varepsilon > 0$. Montrer que $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right)$ est majorée par une suite à convergence lente.

Solution :

1. a) La suite (u_n) a pour limite 0 et $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \dfrac{1}{n+1} \to 0$. Donc $\ell^* = 0$. On a convergence rapide.

b) i) On écrit $v_n = \exp\left(2^n \ln\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)\right)$. Un DL2 du logarithme donne le résultat.

ii) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = e$ et pour n assez grand $v_n \neq e$. De plus :

$$\left|\frac{v_{n+1}-e}{v_n-e}\right| = \left|\frac{\dfrac{-e}{2^{n+2}}+o(\dfrac{1}{2^{n+1}})}{\dfrac{-e}{2^{n+1}}+o(\dfrac{1}{2^n})}\right| = \left|\frac{1}{2}\times\frac{1+o(1)}{1+o(1)}\right| \to \frac{1}{2}$$

Donc (v_n) a une vitesse de convergence géométrique de rapport $\dfrac{1}{2}$.

2. a) Soit $\alpha > 1$. $\ell - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^\alpha}$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [k, k+1]$,

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha}dx \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \text{ et } \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\times\frac{1}{n^{\alpha-1}} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}$$

soit $\ell - S_n \leqslant \dfrac{1}{\alpha-1}\times\dfrac{1}{n^{\alpha-1}} \leqslant \ell - S_{n-1}$, et $\dfrac{1}{\alpha-1}\times\dfrac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant \ell - S_n \leqslant \dfrac{1}{\alpha-1}\times\dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$.

b) Donc par le théorème d'encadrement des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \ell$. D'après ce qui précède :

$$(\alpha-1)n^{\alpha-1} \leqslant \frac{1}{\ell - S_n} \leqslant (\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}$$

et

$$\frac{1}{\alpha-1}\times\frac{1}{(n+2)^{\alpha-1}} \leqslant \ell - S_{n+1} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\times\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$$

En multipliant membre à membre ces inégalités, on obtient : $\dfrac{n^{\alpha-1}}{(n+2)^{\alpha-1}} \leqslant \dfrac{\ell - S_{n+1}}{\ell - S_n} \leqslant 1$.

Donc $\ell^* = 1$ et la convergence est lente.

3. a) On a $X(\Omega) = \mathbb{N}$. Et $e^{\alpha|X|}$ admet une espérance si et seulement si $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} e^{\alpha k}\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ converge absolument.
Ce qui est le cas pour tout α réel et on trouve $E(e^{\alpha|X|}) = e^{\lambda(e^\alpha - 1)}$.
b)i) La fonction exponentielle est convexe.
ii) On a $\alpha \mid x_k \mid \leqslant e^{\alpha|x_k|} \Longrightarrow 0 \leqslant \mid x_k \mid P(X = x_k) \leqslant e^{\alpha|x_k|}P(X = x_k)$. Et $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} e^{\alpha|x_k|}P(X = x_k)$ converge.
iii) On sait que $\lim\limits_{|x|\to+\infty} x^2 e^{-\alpha|x|} = 0$. Il existe donc $a > 0$ tel que $\forall x, \mid x \mid \geqslant a \Rightarrow x^2 \leqslant e^{\alpha|x|}$.

D'autre part $\mid x \mid \leqslant a \Rightarrow x^2 \leqslant a^2$. Donc pour tout x réel, $x^2 \leqslant a^2 + e^{\alpha|x|}$. Ainsi,

$$0 \leqslant x_p^2 P(X = x_p) \leqslant (a^2 + e^{\alpha|x_p|})P(X = x_p) \leqslant a^2 P(X = x_p) + e^{\alpha|x_p|}P(X = x_p)$$

Or $\sum_{p\in\mathbb{N}} a^2 P(X = x_p) = a^2$ et $\sum_{p\in\mathbb{N}} e^{\alpha|x_p|}P(X = x_p) = E(e^{\alpha X}) \Longrightarrow$ la série $\sum_p x_p^2 P(X = x_p)$ converge.

Les variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont de même loi, possèdent toutes un moment d'ordre 2 et sont mutuellement indépendantes ; donc $\dfrac{S_n}{n}$ admet une espérance et une variance. De plus

$$E(\frac{S_n}{n}) = m \text{ et } V(\frac{S_n}{n}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

D'après l'inégalité de Bienaymé Tchebicheff, $\forall \varepsilon > 0, P(\mid \dfrac{S_n}{n} - m \mid \geqslant \epsilon) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$. En posant $u_n = \dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$, la suite (u_n) convient.

Exercice 1.08.

1. Pour tout $x \in]-1, +\infty[$, comparer $\ln(1 + x)$ et x.

2. Soit $a_0 > 0$. Soit (a_n) la suite de premier terme a_0 et définie par récurrence par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \ln(1 + a_n).$$

a) Montrer que la suite (a_n) est bien définie et à termes positifs.

b) Montrer que la suite (a_n) converge et déterminer sa limite.

c) Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n}$.

3. *On admet* que si (x_n) est une suite réelle qui converge vers ℓ, alors la suite de terme général $\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k$ converge aussi vers ℓ.

Déterminer un équivalent de a_n de la forme $\dfrac{\lambda}{n}$, quand n tend vers $+\infty$, où λ est un réel à préciser.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, écrire la formule de Taylor avec reste intégral pour la fonction g définie par $g(t) = -\ln(1 - t)$ entre les points 0 et $x > 0$. En déduire que l'on a :

$$\forall x \in]0, 1[\,,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = g(x).$$

5. Pour tout $x \in]0, 1[$, établir la convergence de la série $\sum a_n x^n$.

6. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, montrer l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall x \in]0, 1[,\ \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n - \frac{2}{n}\right) x^n \right| \leqslant \sum_{n=1}^{N} \left| a_n - \frac{2}{n} \right| - \frac{\varepsilon}{2} \ln(1 - x).$$

En déduire un équivalent de $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.

Solution :

1. Par concavité stricte de $x\mapsto \ln(1+x)$, on a : $\forall x>-1$, $\ln(1+x)\leqslant x$, avec égalité si et seulement si $x=0$.

2. a) On montre par récurrence évidente sur $n\in\mathbb{N}$ la relation « a_n est défini et strictement positif ».

b) D'après la première question, $a_{n+1}=\ln(1+a_n)\leqslant a_n$. Ainsi la suite (a_n) est décroissante et minorée, donc elle converge vers une limite ℓ telle que $\ln(1+\ell)=\ell$ (par continuité), soit $\ell=0$ (d'après la question 1).

c) Comme (a_n) tend vers 0, on a $\ln(1+a_n)\underset{n\to+\infty}{\sim} a_n$ et $a_n-\ln(1+a_n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{a_n^2}{2}$ (avec un DL d'ordre 2).

Donc : $u_n=\dfrac{a_n-\ln(1+a_n)}{a_n\ln(1+a_n)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{\frac{a_n^2}{2}}{a_n^2}=\dfrac{1}{2}$. Ainsi $\lim(u_n)=\dfrac{1}{2}$.

3. On a : $\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_0}=(n+1)\underbrace{\left(\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}u_k\right)}_{\longrightarrow\frac{1}{2}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{n}{2}$, d'où $a_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{2}{n}$.

4. Comme $g(0)=0$ et $g^{(k)}(t)=\dfrac{(k-1)!}{(1-t)^k}$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ (par récurrence évidente), la formule de Taylor avec reste intégral donne :

$$g(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}x^k+\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}g^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1)!}{k!}x^k+\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}\frac{n!}{(1-t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t.$$

L'étude de la fonction $t\mapsto\dfrac{x-t}{1-t}$ montre qu'elle est décroissante sur $[0,x]\subset[0,1[$ donc majorée par sa valeur x en $t=0$, d'où la preuve du résultat pour tout $x\in[0,1[$. En effet

$$\int_0^x\left|\frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+1}}\right|\,\mathrm{d}t\leqslant x^n\int_0^x\frac{dt}{1-t}=x^n|\ln(1-x)|$$

5. Par théorème de comparaison pour les séries, on a :

$$0\leqslant a_nx^n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2}{n}x^n\quad\text{et la série}\quad\sum\frac{2}{n}x^n\quad\text{converge si}\quad x\in]0,1[.$$

6. Comme $a_n=\dfrac{2}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, par définition de la limite, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que : $\forall n>N$, $\left|a_n-\dfrac{2}{n}\right|\leqslant\dfrac{\epsilon}{2n}$.

Par théorème de comparaison avec la série de la question 5, on déduit la convergence de la série $\sum \left| a_n - \frac{2}{n} \right| x^n$. On peut donc écrire l'inégalité triangulaire suivante :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n-\frac{2}{n}\right)x^n\right| &\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\left|a_n-\frac{2}{n}\right|x^n = \sum_{n=1}^{N}\left|a_n-\frac{2}{n}\right|x^n + \sum_{n=N+1}^{+\infty}\left|a_n-\frac{2}{n}\right|x^n \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{N}\left|a_n-\frac{2}{n}\right| + \sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{\epsilon}{2n}x^n \leqslant \sum_{n=1}^{N}\left|a_n-\frac{2}{n}\right| + \frac{\epsilon}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{N}\left|a_n-\frac{2}{n}\right| - \frac{\epsilon}{2}\ln(1-x).\end{aligned}$$

Par suite, $|f(x)-2g(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{N}\left|a_n-\frac{2}{n}\right| + \frac{\varepsilon}{2}g(x)$. Soit : $\left|\frac{f(x)}{g(x)}-2\right| \leqslant \frac{1}{g(x)}\sum_{n=1}^{N}\left|a_n-\frac{2}{n}\right| + \frac{\epsilon}{2}$.

Comme $\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{g(x)} = 0$ et $\sum_{n=1}^{N}\left|a_n-\frac{2}{n}\right|$ constant, on a : $\exists N', \forall n > N'$, $\frac{1}{g(x)}\sum_{n=1}^{N}\left|a_n-\frac{2}{n}\right| \leqslant \frac{\epsilon}{2}$.

Exercice 1.09.

Soit f une fonction continue et positive sur $I=[0,1]$ telle que $\gamma = \int_0^1 f(t)dt < 1$.

On considère une fonction u_0 continue sur I qui vérifie :

$$\forall\, x \in I,\ u_0(x) \leqslant 1 + \int_0^x u_0(t)f(t)dt$$

On définit par récurrence la suite de fonctions $(u_n)_{n\geqslant 0}$ en posant pour tout n entier naturel :

$$\forall\, x \in I,\ u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t)f(t)dt$$

1. Soit $x \in I$. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que la suite $(u_n(x))_{n\geqslant 0}$ est croissante.

2. a) Justifier pour tout $n \geqslant 0$, que la fonction $x \longmapsto u_n(x)$ est continue sur I.

En déduire, que pour tout entier naturel n, le nombre réel $M_n = \max\{|u_n(x)|; x \in I\}$ est bien défini.

b) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, on a $M_{n+1} \leqslant 1 + \gamma M_n$.

Pour $n \geqslant 1$, majorer M_n en fonction de M_0 et de γ. En déduire que la suite (M_n) est bornée.

c) Justifier que pour tout $x \in I$, la suite $(u_n(x))_{n\geqslant 0}$ est convergente. On note $u(x)$ sa limite.

3. a) Soit x et y deux éléments de I tels que $x < y$. Montrer qu'il existe une constante M telle que :

$$\forall\, n \geqslant 1,\ |u_n(y) - u_n(x)| \leqslant M \int_x^y f(t)dt$$

En déduire que la fonction u est continue sur I.

b) Pour $n \geqslant 1$, montrer que la fonction $x \to v_n(x) = u_{n+1}(x) - u_n(x)$ est dérivable et croissante sur I.

c) Soit $n \geqslant 1$. Montrer que pour tout $x \in I$, on a :

$$0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \gamma\,(u_n(x) - u_{n-1}(x))$$

En déduire pour tout $x \in I$ et tout entier $p \geqslant 1$, l'encadrement suivant :

$$0 \leqslant u_{n+p}(x) - u_n(x) \leqslant \gamma^n (1-\gamma)^{-1}\,(u_1(x) - u_0(x))$$

d) Soit $x \in I$. Montrer que $\displaystyle\int_0^x u_n(t)f(t)dt$ converge vers $\displaystyle\int_0^x u(t)f(t)dt$.

En déduire que la fonction u est de classe C^1 sur I.

Solution :

1. Soit $\mathcal{P}_n$ l'hypothèse de récurrence : « $u_n(s) \leqslant u_{n+1}(s)$ pour tout $s \in [0,1]$ ». On voit que $\mathcal{P}_0$ est vraie par hypothèse. Supposons que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Alors, on a pour tout $x \in [0,1]$:

$$u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) = \int_0^x [u_{n+1}(t) - u_n(t)]\, f(t)dt \geqslant 0$$

puisque l'intégrande est positive.

Donc, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la suite $(u_n(x))_{n\geqslant 0}$ est croissante pour tout $x \in [0,1]$.

2. a) La fonction u_0 est continue sur I et par une récurrence immédiate, on voit que la fonction u_{n+1} est continue comme primitive de la fonction continue u_n. Le réel M_n est bien défini puisque la fonction u_n est continue sur le segment I, elle donc bornée et atteint ses bornes.

b) On voit que

$$|u_{n+1}(x)| \leqslant 1 + \int_0^x |u_n(t)|f(t)dt \leqslant 1 + \int_0^1 |u_n(t)|f(t)dt \leqslant 1 + M_n \int_0^1 f(t)dt = 1 + \gamma M_n$$

D'où $M_n \leqslant \big(1 + \gamma + \cdots + \gamma^{n-1}\big) + \gamma^n M_0 \leqslant \dfrac{1}{1-\gamma} + M_0 = C$. La suite (M_n) est donc bornée.

c) La suite $(u_n(x))_{n\geqslant 0}$ est croissante d'après a) et bornée d'après b), elle est donc convergente.

3. a) Il vient :

$$|u_n(y) - u_n(x)| \leqslant \int_x^y |u_{n-1}(t)|f(t)dt \leqslant C \int_x^y f(t)dt.$$

En prenant la limite lorsque n tend vers $+\infty$, il vient

$$|u(y) - u(x)| \leqslant C \int_x^y f(t)dt.$$

Il reste à faire tendre y vers x puis à échanger les rôles de y et x pour obtenir que la fonction u est donc continue sur I.

b) Pour $n \geqslant 1$, on a : $v_n(x) = \displaystyle\int_0^x [u_n(t) - u_{n-1}(t)]\, f(t)dt$.

L'intégrande est une fonction continue. Par suite, v_n est dérivable et, d'après la question 1 :

$$v_n'(x) = [u_n(x) - u_{n-1}(x)]\, f(x) \geqslant 0$$

La fonction v_n est donc croissante sur I.

c) Soit $n \geqslant 1$. L'inégalité de gauche est évidente d'après 1. De plus, avec la croissance de la fonction v_n, il vient

pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) - u_n(x) &= \int_0^x [u_n(t) - u_{n-1}(t)]\, f(t)dt \leqslant [u_n(x) - u_{n-1}(x)] \int_0^x f(t)dt \\ &= \gamma\, (u_n(x) - u_{n-1}(x)) \end{aligned}$$

En utilisant ce qui précède et en écrivant $u_{n+p}(x) - u_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} [u_{n+k+1}(x) - u_{n+k}(x)]$, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant u_{n+p}(x) - u_n(x) &\leqslant \left(1 + \cdots + \gamma^{p-1}\right)(u_{n+1}(x) - u_n(x)) \\ &\leqslant (1-\gamma)^{-1}\gamma^n\,(u_1(x) - u_0(x))\,. \end{aligned}$$

d) En faisant tendre p vers l'infini, il vient :

$$0 \leqslant u(x) - u_n(x) \leqslant (1-\gamma)^{-1}\gamma^n\,(u_1(x) - u_0(x))$$

D'où $\left|\displaystyle\int_0^x u(t)f(t)dt - \int_0^x u_n(t)f(t)dt\right| \leqslant (1-\gamma)^{-1}\gamma^{n+1}(M_0+M_1) \to 0($ quand n tend vers $+\infty)$.

On peut alors passer à la limite dans l'égalité définissant u_{n+1} et on obtient

$$u(x) = 1 + \int_0^x u(t)f(t)dt$$

On en déduit facilement que u est de classe C^1 sur I. En dérivant l'égalité précédente, il vient $u'(x) = f(x)u(x)$.

En posant $N'' = \max(N, N')$, on a prouvé que : $\forall \epsilon > 0, \exists N'',\ \forall n > N'', \left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - 2\right| \leqslant \epsilon$, soit $f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} 2g(x)$.

Exercice 1.10.

On considère une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{n+1}$.

On suppose que $u_0 > 0$.

On pose $v_n = \dfrac{\ln(u_n)}{2^n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, v_n est bien définie.

2.a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{\ln(k)}{2^k}$ converge. On pose $\sigma = -\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$.

b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ converge. Exprimer sa limite ℓ en fonction de u_0 et σ.

3. On suppose dans cette question que $u_0 \neq e^{-\sigma}$. Étudier le comportement en $+\infty$ de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

4. On suppose dans cette question que $u_0 = e^{-\sigma}$.

a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$.

b) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Solution :

1. On montre par récurrence, que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n > 0$.

2.a) À l'aide des croissances comparées, on remarque que $\dfrac{\ln(k)}{2^k} = o\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$. On conclut en utilisant les théorèmes de comparaisons des séries à termes positifs, et la convergence de la série de Riemann $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$.

b) La suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie la relation de récurrence, pour tout $k \geqslant 1$, $v_k - v_{k-1} = -\dfrac{\ln(k)}{2^k}$. On en déduit par télescopage que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n}(v_k - v_{k-1}) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} = v_n - v_0 = v_n - \ln(u_0)$$

Ainsi, $v_n = \ln(u_0) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k}$.

Comme somme de suites qui convergent, on en déduit à l'aide des précédentes notations, que la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ converge, vers $\ell = \ln(u_0) + \sigma$.

3. • Supposons que $u_0 > e^{-\sigma}$. On a alors $\ell > 0$, et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \lim_{n\to+\infty} 2^n v_n = +\infty$. Ainsi, par composition des limites, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

• Supposons que $u_0 < e^{-\sigma}$. On a alors $\ell < 0$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} 2^n v_n = -\infty$. Ainsi, par composition des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4. a) On reprend l'expression donnée, en 3., en remplaçant $\ln(u_0) = -\sigma$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$v_n = \ln(u_0) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} = -\sigma - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}.$$

b) Puisque $\sum\limits_{k=n+2}^{+\infty} 2^{n-k}\ln(k) > 0$, on en déduit de la question précédente que $2^n v_n > \dfrac{\ln(n+1)}{2}$, ce qui permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} 2^n v_n = +\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 1.11.

1. Montrer que pour tout x réel, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t^2}dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2}dt$ convergent.

On pose alors pour tout x réel : $C(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t^2}dt$ et $S(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2}dt$.

2. a) Montrer que les deux fonctions C et S sont continues sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que pour tous réels u et h, on a :

$$|\sin(u+h) - \sin(u) - h\cos(u)| \leqslant \frac{h^2}{2}$$

c) En déduire que S est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer pour tout x réel, $S'(x)$.

3. Déterminer pour tout x réel, une relation entre $S'(x)$ et $S(x)$.

4. a) Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée de $g : x \to e^{x^2/4}f(x)$.
En déduire les solutions de l'équation différentielle $2f'(x) + xf(x) = 0$.
b) On suppose qu'on peut écrire pour tout x réel, $S(x) = A(x)e^{-x^2/4}$ avec A de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
Établir la relation : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ S(x) = \dfrac{e^{-x^2/4}}{2} \displaystyle\int_0^x e^{t^2/4}dt$.

5. Déterminer un équivalent de $S(x)$ au voisinage de $\pm\infty$.

Solution :

1. Pour tout x réel, $t \to \sin(xt)e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $|\sin(xt)e^{-t^2}| \leqslant e^{-t^2}$ dont l'intégrale converge.

La démonstration est identique pour $t \to \cos(xt)e^{-t^2}$.

2. a) L'inégalité des accroissements finis donne, pour tout réels x et x' :

$$|\sin(x) - \sin(x')| \leqslant |x - x'|$$

Ainsi :

$$|S(x) - S(x')| \leqslant \int_0^{+\infty} |\sin(xt) - \sin(x't)|e^{-t^2} dt \leqslant |x - x'| \int_0^{+\infty} te^{-t^2} dt \leqslant \frac{1}{2}|x - x'|$$

La fonction f est lipchitzienne donc continue sur $\mathbb{R}$.

b) On utilise une inégalité de Taylor. On a :

$$|\sin(u + h) - \sin(u) - h\cos(u)| \leqslant \frac{h^2}{2} \sup_{t\in[u,u+h]} |\sin(t)| \leqslant \frac{h^2}{2}$$

c) On étudie la limite du candidat proposé à être la dérivée de $S(x)$ avec u remplacé par xt et h par ht. Il vient :

$$\left|\int_0^{+\infty} (\sin((x + h)t) - \sin(xt) - ht\cos(xt))e^{-t^2} dt\right| \leqslant \frac{h^2}{2} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{Ch^2}{2}$$

Ainsi :

$$S'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{S(x + h) - S(x)}{h} = \int_0^{+\infty} \cos(xt)te^{-t^2} dt$$

3. On utilise une intégration par parties, les fonctions en jeu étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$. Soit $A > 0$. On a :

$$\int_0^A \cos(xt)te^{-t^2} dt = \left[-\cos(xt)\frac{e^{-t2}}{2}\right]_0^A - \frac{x}{2}\int_0^A \sin(xt)e^{-t^2} dt$$

En prenant la limite lorsque A tend vers $+\infty$, il vient :

$$S'(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}S(x)$$

4. a) La dérivée se calcule aisément. On obtient $g'(x) = e^{x^2/4}(f'(x) + \frac{x}{2}f(x))$.

Si la fonction f vérifie $2f'(x) + xf(x) = 0$, alors $g'(x) = 0$ et $g(x) = C$. Donc, on a :

$$f(x) = Ce^{-x^2/4}$$

On peut écrire $S(x) = A(x)e^{-x^2/4}$ avec S vérifiant l'équation $S'(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}S(x)$. En dérivant, il vient :

$$A'(x)e^{\frac{-x^2}{4}} = \frac{1}{2} \Rightarrow A(x) = \frac{1}{2}\int_0^x e^{t^2/4} dt + C$$

Comme $S(0) = 0$, on obtient :

$$S(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{-x^2}{4}} \int_0^x e^{t^2/4} dt$$

5. La fonction S est impaire : on étudie la limite en $+\infty$.

On fait deux intégrations par parties sur le segment $[1, x]$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 e^{t^2/4}dt$ est une constante :

$$\int_1^x e^{t^2/4}dt = \int_1^x \frac{t/2e^{t^2/4}}{t/2}dt = \frac{2e^{x^2/4}}{x} - C + 2\int_1^x \frac{e^{t^2/4}}{t^2}dt$$

$$= \frac{2e^{x^2/4}}{x} - C + 4\int_1^x \frac{t/2e^{t^2/4}}{t^3}dt = \frac{2e^{x^2/4}}{x} + 4\frac{e^{x^2/4}}{x^3} + K - 12\int_1^x \frac{e^{t^2/4}}{t^4}dt$$

Donc

$$S(x) = \frac{2}{x} + \frac{4}{x^3} + Me^{-x^2/4} + 12e^{-x^2/4}\int_1^x \frac{e^{t^2/4}}{t^4}dt = \frac{2}{x} + o\left(\frac{2}{x}\right)$$

Exercice 1.12.

1. Soit a et b deux réels tels que $0 \leqslant a < b$. Soit f et g deux fonctions continues sur le segment $[a, b]$.

On suppose de plus que pour tout $x \geqslant 0$, on a $g(x) \geqslant 0$.

a) Justifier l'existence de deux réels α et β appartenant à l'intervalle $[a, b]$ tels que $m = f(\alpha)$, $M = f(\beta)$ et pour tout $x \in [a, b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

b) En déduire qu'il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt$.

2. Soit un entier $n \geqslant 2$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction impaire et de classe C^n sur $\mathbb{R}$.

a) On suppose que f' est strictement monotone. Montrer qu'il existe une fonction $\theta : \mathbb{R} \to [0, 1]$ telle que pour tout réel x, on a $f(x) = xf'\Big(x\theta(x)\Big)$.

b) Soit $x > 0$. Prouver qu'il existe un réel $d_x \in [0, x]$ tel que $f(x) = xf'(0) + \dfrac{x^2}{2}f''(d_x)$.

c) Soit $x > 0$. Prouver qu'il existe un réel $h_x \in]0, x[$ tel que $f(x) = xf'(0) + x^2\theta(x)f''(h_x)$.

d) On suppose que $f''(0) \neq 0$. Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to 0} \theta(x)$

3. On suppose dans cette question que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \text{Arctan}(x)$.

a) Expliciter la fonction θ sur $\mathbb{R}^*$.

b) Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to 0} \theta(x)$. Obtient-on une contradiction du résultat de la question 2 ?

Solution :

1. a) Comme la fonction f est continue sur le segment $[a, b]$, elle est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes.

b) Par positivité de la fonction g, croissance de l'intégrale et en posant $A = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx$ et $B = \displaystyle\int_a^b g(x)dx$:

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \;\Rightarrow\; mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x) \;\Rightarrow\; mB \leqslant A \leqslant MB\,.$$

Si $B = 0$, l'inégalité précédente implique $A = 0$ et tout choix de c convient.

Sinon, en divisant par $B > 0$, on obtient : $f(\alpha) = m \leqslant \dfrac{A}{B} \leqslant M = f(\beta)$.
Le théorème des valeurs intermédiaires assure alors l'existence d'un réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \dfrac{A}{B}$.

2. a) Comme f est impaire, $f(0) = 0$. Considérons $x \geqslant 0$. On applique la question précédente avec les fonctions f' et $t \to 1$ continues sur $[0,x]$. Il existe alors un réel $c_x \in [0,x]$ tel que :

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt = \int_0^x 1 \times f'(t)dt = f'(c_x)\int_0^x 1dt = f'(c_x)x.$$

Comme $c_x \in [0,x]$, il existe $\theta(x) \in [0,1]$ tel que $c_x = x\theta(x)$. On a alors $f(x) = xf'\Big(x\theta(x)\Big)$.

b) Soit $x > 0$. Une intégration par parties donne :

$$\int_0^x (x-t)f''(t)dt = \Big[(x-t)f'(t)\Big]_0^x + \int_0^x f'(t)dt = -xf'(0) + f(x)$$

Ainsi, $f(x) = xf'(0) + \displaystyle\int_0^x (x-t)f''(t)dt$.
Par la question 1 appliquée aux fonctions f'' et $t \to x - t$ sur $[0,x]$, il existe un réel $d_x \in [0,x]$ tel que :

$$\int_0^x (x-t)f''(t)dt = f''(d_x)\int_0^x (x-t)dt = \frac{x^2}{2}f''(d_x).$$

Ainsi, il existe un réel $d_x \in [0,x]$ tel que $f(x) = xf'(0) + \dfrac{x^2}{2}f''(d_x)$.

c) On applique le théorème des accroissements finis à la fonction f' entre les points $x\theta(x)$ et 0. Il existe alors $h_x \in]0, x\theta(x)[\subset]0,x[$ tel que :
$f'(x\theta(x)) = f'(0) + x\theta(x)f''(h_x)$, d'où $f(x) = xf'(x\theta(x)) = xf'(0) + x^2\theta(x)f''(h_x)$.

d) Par suite, $\forall\, x > 0,\; xf'(0) + \dfrac{x^2}{2}f''(d_x) = xf'(0) + x^2\theta(x)f''(h_x)$, d'où, $\dfrac{1}{2}f''(d_x) = \theta(x)f''(h_x)$.
On fait tendre x vers 0^+. Les réels h_x et d_x tendent alors vers 0 . Comme la fonction f'' est continue, il vient $\dfrac{1}{2}f''(0) = \theta(0)\,f''(0)$. Comme $f''(0) \neq 0$, on conclut que $\theta(0) = \dfrac{1}{2}$.

3. a) Dans ce cas, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$f(x) = xf'\Big(x\theta(x)\Big) \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{Arctan}(x) = \frac{x}{1+x^2\theta^2(x)} \quad\Rightarrow\quad \theta^2(x) = \frac{1}{x\,\mathrm{Arctan}(x)} - \frac{1}{x^2}.$$

Comme $\theta(x) \geqslant 0$, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \theta(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x \operatorname{Arctan}(x)} - \dfrac{1}{x^2}} = \sqrt{\dfrac{x - \operatorname{Arctan}(x)}{x^2 \operatorname{Arctan}(x)}}$.

b) Le DL3 de la fonction Arctan au voisinage de 0 est $\operatorname{Arctan}(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.
Par suite,

$$\frac{x - \operatorname{Arctan}(x)}{x^2 \operatorname{Arctan}(x)} = \frac{x^3/3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} \underset{0}{\sim} \frac{x^3/3}{x^3} = \frac{1}{3}$$

ce qui entraîne

$$\lim_{x \to 0} \theta(x) = \lim_{x \to 0} \left(\sqrt{\frac{x - \operatorname{Arctan}(x)}{x^2 \operatorname{Arctan}(x)}} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Il n'y a pas de contradiction avec la question 3 car nous ne sommes plus sous les mêmes hypothèses. Ici, $f''(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$, d'où $f''(0) = 0$.

Exercice 1.13.

Soit un réel $x_0 > 0$. On définit la suite (x_n) par : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$.

On admet que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

1. Montrer que la suite (x_n) est monotone et préciser sa monotonie.

2. En utilisant un raisonnement par l'absurde, montrer que la suite (x_n) admet une limite et la déterminer.

3. Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{x_n}$.

4. Montrer que la suite $(x_{n+1}^2 - x_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

5. Soit (a_n) et (b_n) des suites de réels strictement positifs tels que $a_n \sim b_n$ et $\displaystyle\sum_n a_n$ diverge.

On admet le résultat suivant : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \sim \sum_{k=0}^{n} b_k$ lorsque n tend vers $+\infty$.

a) Montrer que la suite $\left(\dfrac{x_n^2}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et en déduire un équivalent de (x_n).

b) Déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x_k^2}$.

c) En déduire que $x_n = \sqrt{2n}\left(1 + \dfrac{1}{8}\dfrac{\ln(n)}{n} + o\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)\right)$.

Solution :

1. Comme $x_0 > 0$, on montre que (x_n) est à valeurs strictement positives et que $x_{n+1} > x_n$. Ainsi, la suite (x_n) est strictement croissante.

2. D'après le théorème de la limite monotone, (x_n) tend vers un réel $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Si ℓ est fini, alors $\ell = \ell + \dfrac{1}{\ell}$, ce qui est impossible. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

3. Comme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x_k} = x_{k+1} - x_0$, alors la série $\displaystyle\sum \frac{1}{x_n}$ diverge.

4. D'après la définition, $x_{n+1}^2 - x_n^2 = 2 + \dfrac{1}{x_n^2}$. Ainsi, comme (x_n) tend vers $+\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_{n+1}^2 - x_n^2) = 2$.

5.a) Comme $x_{n+1}^2 - x_n^2 \sim 2$ et $\sum 2$ diverge, d'après la question précédente, $x_n^2 - x_0^2 \sim 2n$. Ainsi, $x_n^2 \sim 2n$ et $x_n \sim \sqrt{2n}$.

b) D'après la question précédente, $\dfrac{1}{x_n^2} \sim \dfrac{1}{2n}$. Or, $\displaystyle\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc, d'après la question précédente, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x_k^2} \sim \frac{1}{2} H_n \sim \frac{\ln(n)}{2}$.

c) Comme $\displaystyle x_{n+1}^2 = x_0^2 + 2(n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x_k^2}$, d'après la question précédente,

$$x_n^2 = 2n + \frac{1}{2}\ln(n) + o(\ln(n)).$$

En utilisant le développement limité de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ en 0,

$$x_n = \sqrt{2n}\left(1 + \frac{1}{8}\frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right).$$

Exercice 1.14.

1. Soit f et g deux fonctions continues sur un segment $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$ $(a < b)$. On considère la fonction h définie sur $[a,b]$ par :

$$h(x) = f(b)g(x) - f(x)g(b) - f(a)g(x) + g(a)f(x).$$

a) Calculer $h(a)$ et $h(b)$. Que remarque-t-on ?

b) En déduire qu'il existe un réel $c \in]a,b[$ pour lequel on a :

$$(f(b) - f(a))\, g'(c) = f'(c)\,(g(b) - g(a))$$

2. Soit u et v deux fonctions continues sur $[a, b]$. On suppose que v ne s'annule pas sur $]a, b[$. On considère les fonctions f et g définies sur $[a, b]$ par :

$$\forall x \in [a, b],\ f(x) = \int_a^x u(t)v(t)dt \text{ et } g(x) = \int_a^x v(t)dt.$$

a) Justifier la continuité de f et g sur $[a, b]$ et leur dérivabilité sur $]a, b[$.

b) En déduire l'existence d'un réel $c \in]a, b[$ qui vérifie la relation :

$$\int_a^b u(t)v(t)dt = u(c) \int_a^b v(t)dt.$$

c) Soit φ et ψ deux fonctions continues sur $[0, 1]$ telles que $\varphi + \psi$ ne s'annule pas sur $]0, 1[$ et telles que :

$$\int_0^1 \left(\varphi(t)\right)^2 dt = \int_0^1 \left(\psi(t)\right)^2 dt$$

En utilisant la question précédente, montrer qu'il existe un réel $s \in]0, 1[$ tel que $\varphi(s) = \psi(s)$. Quel résultat obtient-on dans le cas où $\psi(x) = x$?

Solution :

1. a) On trouve $h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b) = h(b)$.

b) Les règles usuelles impliquent que h est continue sur un segment $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. De plus, on a $h'(x) = (f(b) - f(a))g'(x) - f'(x)(g(b) - g(a))$. Comme $h(a) = h(b)$, le théorème de Rolle nous assure l'existence d'un réel $c \in]a, b[$ pour lequel on a :

$$\left(f(b) - f(a)\right) g'(c) = f'(c) \left(g(b) - g(a)\right).$$

2. a) Les fonctions f et g sont deux primitives de fonctions continues, elles sont donc continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$.

b) Comme $f'(x) = u(x)v(x)$ et $g'(x) = v(x)$ et en utilisant 1. b), il existe un réel $c \in]a, b[$ qui vérifie :

$$v(c) \int_a^b u(t)v(t)dt = u(c)v(c) \int_a^b v(t)dt.$$

Or la fonction v ne s'annulant pas sur $]a, b[$, on peut simplifier par $v(c)$.

c) On prend pour u et v les deux fonctions définies par $u = \varphi - \psi$ et $v = \varphi + \psi$. Elles vérifient les hypothèses de la question précédente. Il existe donc $s \in]0, 1[$ tel que : $0 = [\varphi(s) - \psi(s)] \int_0^1 v(t)dt$. Puisque v est une fonction continue sur $[0, 1]$ qui ne s'annule pas sur $]0, 1[$, le théorème des valeurs intermédiaires nous dit que v est soit strictement positive sur $]0, 1[$ soit strictement négative. Un raisonnement classique sur les primitives nous assure que $\displaystyle\int_0^1 v(t)dt \neq 0$ et par conséquent on a $\varphi(s) = \psi(s)$.

Lorsque l'on prend pour ψ la fonction identité et si φ est une fonction continue sur $[0,1]$ vérifiant $\varphi(x)+x\neq 0$ pour tout x de $]0,1[$ et $\displaystyle\int_0^1 \varphi(t)^2dt=\frac{1}{3}$, alors la fonction φ admet un point fixe appartenant à $]0,1[$.

Exercice 1.15.

1. a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2/2}dx$. On pose :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ I_n=\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2/2}dx$$

b) Trouver pour tout $n\geqslant 2$, une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, calculer I_{2n} et I_{2n+1}.

2. Montrer que l'on a :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ \int_0^{+\infty} x^{n+1}\exp\Big(-\frac{nx^2}{2}\Big)dx=\int_0^{+\infty} x^{n-1}\exp\Big(-\frac{nx^2}{2}\Big)dx.$$

3. a) Établir la relation :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ n^{-\frac{n+2}{2}}I_{n+1}-n^{-\frac{n+1}{2}}I_n=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^n\Big(x+\frac{1}{x}-2\Big)\exp\Big(-\frac{nx^2}{2}\Big)dx.$$

b) En déduire l'encadrement suivant :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ 0<\sqrt{n}\,I_n<I_{n+1}.$$

4. Établir les inégalités :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ \sqrt{1-\frac{1}{2n}}<4^{-n}\binom{2n}{n}\sqrt{\pi n}<1.$$

En déduire un équivalent de $\displaystyle\binom{2n}{n}$.

Solution :

1. a) La fonction $x\to x^n e^{-x^2/2}$ est définie, continue et positive sur $\mathbb{R}^+$. Cette fonction est négligeable devant $1/x^2$ en $+\infty$, on en déduit que l'intégrale I_n est convergente.

b) Pour $n\geqslant 2$, on effectue une intégration par parties en posant $u(x)=x^{n-1}$ et $v(x)=-e^{-x^2/2}$ d'où

$$\int_0^A x^n e^{-x^2/2}dx=[uv(x)]_0^A+\int_0^A (n-1)x^{n-2}e^{-x^2/2}dx.$$

On fait tendre A vers $+\infty$ donc

$$I_n=(n-1)I_{n-2}.$$

On a $I_0 = \sqrt{2\pi}/2$ et $I_1 = 1$. On montre par récurrence que

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}\sqrt{\pi/2},$$

et

$$I_{2n+1} = 2^n(n!).$$

2. a) On utilise une intégration par parties en posant $u(x) = x^n$ et $v(x) = -1/ne^{-nx^2/2}$, on en déduit l'égalité pour tout entier $n \geqslant 1$

$$\int_0^{+\infty} x^{n+1}e^{-nx^2/2}dx = \int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-nx^2/2}dx.$$

3.a) On remarque que

$$\int_0^{+\infty} x^n\Big(x+\frac{1}{x}-2\Big)\exp\Big(-\frac{nx^2}{2}\Big)dx = \int_0^{+\infty} x^{n-1}\Big(x^2-2x+1\Big)\exp\Big(-\frac{nx^2}{2}\Big)dx$$

On effectue le changement de variable affine $u = \sqrt{n}x$, et on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^n e^{-nx^2/2}(x+\frac{1}{x}-2)dx &= 2\left(\int_0^{+\infty} x^{n+1}e^{-nx^2/2}dx - \int_0^{+\infty} x^n e^{-nx^2/2}dx\right)\\ &= 2(n^{-\dfrac{n+2}{2}}I_{n+1} - n^{-\dfrac{n+1}{2}}I_n)\end{aligned}$$

Par conséquent, on a pour tout entier n :

$$n^{-\dfrac{n+2}{2}}I_{n+1} - n^{-\dfrac{n+1}{2}}I_n = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^n e^{-nx^2/2}(x+\frac{1}{x}-2)dx.$$

b) Le membre de droite est positif d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ 0 < \sqrt{n}I_n < I_{n+1}$.

4. On a pour tout entier $n > 0$: $\sqrt{2n}I_{2n} < I_{2n+1}$. Soit

$$\sqrt{2n}\frac{(2n)!}{2^n n!}\sqrt{\pi/2} < 2^n n!$$

On en déduit $4^{-n}\binom{2n}{n}\sqrt{\pi n} < 1$, puis $\sqrt{2n-1}I_{2n-1} < \dfrac{(2n)!}{2^n n!}\sqrt{\pi/2}$. Donc

$$\sqrt{1-\frac{1}{2n}} < 4^{-n}\binom{2n}{n}\sqrt{\pi n}.$$

Par conséquent, un équivalent de $\binom{2n}{n}$ est $\dfrac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$.

Exercice 1.16.

1. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ et φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

a) Déterminer l'espace propre de φ associé à la valeur propre 3.

b) En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de φ.

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs réelles telle que :

$$\forall\, u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n,\ f(u) = \sum_{i=1}^{n} u_i^2$$

Soit S une matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et Q la forme quadratique associée à S définie pour tout X
de $\mathbb{R}^n$ par : $Q(X) = {}^tXSX$.

On suppose que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on a $Q(X) \geqslant 0$ et que $Q(X) = 0$ si et seulement si $X = 0$.

a) Justifier que toutes les valeurs propres de S sont strictement positives.

b) Soit $u \in \mathbb{R}^n$. Déterminer les extrema de f sous la contrainte $Q(u) = 1$.

c) Appliquer à la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$:

$$Q(x, y, z) = 7x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy - 4xz - 2yz$$

Solution :

1. a) On résoud le système $AX = 3\,X = 3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2x + y - z = 0$, équation du plan $E_3 = \ker(\varphi - 3Id)$.

Ainsi le sous-espace propre associé à la valeur propre 3 est de dimension 2.

b) La matrice A est symétrique réelle. Elle est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont orthogonaux.

La trace donne l'autre valeur propre, soit 9, d'où :

$$\ker(\varphi - 9Id) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. a) Si $SX = \lambda\, X$, alors $0 < {}^tXSX = \lambda\, ||X||_2^2 \Rightarrow \lambda > 0$ car $X \neq 0$.

b) Soit $\psi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ (endomorphisme symétrique) associé à S. Alors :

$$g(u) = Q(u) - 1 = \langle \psi(u), u \rangle - 1$$

$$g(u+h) = \langle \psi(u+h), u+h \rangle - 1 = g(u) + 2\langle \psi(u), h \rangle + \langle \psi(h), h \rangle$$

avec, par inégalité de Cauchy-Schwarz et linéarité de ψ : $|\langle \psi(h), h \rangle| \leqslant ||\psi(h)_2||\,||h||_2 = o\big(||h||_2\big)$.
Par unicité du développement limité à l'ordre 1, $\nabla(g)(u) = 2\,\psi(u)$. De même, $\nabla(f)(u) = 2\,u$.

Remarque : On peut aussi calculer les dérivées partielles de $g(u) = {}^tXSX - 1$ et $f(u) = {}^tXX$.

Par le cours, les conditions nécessaires d'extremum sous contrainte sont : $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \psi(u) = \lambda\, u$.
En u_0 vecteur propre de ψ pour $\lambda_0 > 0$ tel que $g(u_0) = g(u_0 + h) = 0$, on a :

$$g(u_0 + h) = g(u_0) + 2\langle \psi(u_0), h \rangle + Q(h) \Rightarrow \langle u_0, h \rangle = -\frac{Q(h)}{2\,\lambda_0}$$

$$f(u_0 + h) = f(u_0) + 2\langle u_0, h \rangle + ||h||_2^2 = f(u_0) + ||h||_2^2 - \frac{Q(h)}{\lambda_0}$$

Mais on sait que :

$$\mu\,||h||_2^2 \leqslant Q(h) \leqslant \mu'\,||h||_2^2 \quad \text{où} \quad \mu = \min\big(\mathrm{Sp}(S)\big) \quad \text{et} \quad \mu' = \max\big(\mathrm{Sp}(S)\big)$$

D'où $f(u_0 + h) \leqslant f(u_0)$ si $\lambda_0 = \mu$, et on a un minimum en u_0 associé à la plus petite valeur propre ; c'est analogue pour le maximum et μ'.

c) Applications.

- Pour $\mu = 3$,

$$1 = Q(x, y, 2x+y) = 15\,x^2 + 6\,y^2 + 12\,x\,y \Rightarrow f(x, y, 2x+y) = \sqrt{5\,x^2 + 2\,y^2 + 4\,x\,y} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

- Pour $\mu = 9$,

$$1 = Q(2t, t, -t) = 54t^2 \Rightarrow f(2t, t, -t) = \sqrt{4t^2 + t^2 + t^2} = \frac{1}{3}$$

Exercice 1.17.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $a_n = H_n - \ln n$ et $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$.

1. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$.

2. Montrer que la série de terme général $(a_{n+1} - a_n)$ converge, puis en déduire que la suite (a_n) converge.

3. Pour tout réel $\lambda > 0$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^\lambda}$.

a) Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont monotones.

b) En déduire que la suite (S_n) converge.

4. Montrer que $\ln(u_n\sqrt{n}) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} - \dfrac{1}{2}\,a_n + \sum_{k=1}^{n} w_k$, où w_k est le terme général d'une série convergente. En déduire la nature de la suite (u_n).

5. Pour tout réel $\lambda > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda}\right)$.

Montrer que la suite (v_n) converge. Montrer que sa limite est nulle si et seulement si $\lambda \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Solution :

1. On voit que u_n est le produit de facteurs strictement positifs car $1 + \dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$ reste positif pour tout $k \geqslant 1$.

2. On a : $a_{n+1} - a_n = (H_{n+1} - \ln(n+1)) - (H_n - \ln(n)) = \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$. Un simple développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre 2 donne

$$\frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\dfrac{1}{n}} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi, on a : $a_{n+1} - a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2}$.

Comme la série de Riemannn $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum a_n - a_{n+1}$ converge. Par télescopage, la suite (a_n) admet une limite.

3. Posons $b_n = \dfrac{1}{n^\lambda}$.

a) La suite (S_{2n}) décroît car $S_{2(n+1)} - S_{2n} = b_{2n+2} - b_{2n+1} \leqslant 0$ car (b_n) décroissante.

La suite (S_{2n+1}) croît car $S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = -b_{2n+3} + b_{2n+2} \geqslant 0$ car (b_n) décroissante.

b) On a $S_{2n+1} - S_{2n} = -b_{2n+1} \to 0$, car $\lim(b_n) = 0$.

D'après la question précédente les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes ; donc elles convergent vers la même limite ℓ.

Comme (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers ℓ, il en est de même de (S_n).

4. On peut écrire

$$\ln\left(\sqrt{n}u_n\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} + \frac{1}{2}a_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right) - \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\ln\left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right) - \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} + \frac{1}{2k}\right)}_{=w_k}.$$

D'après le développement limité $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$, on a $w_k \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{3k^{3/2}}$.
Comme la série de Riemannn $\sum \dfrac{1}{n^{3/2}}$ converge, par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum w_n$ converge.
Ainsi, d'après les deux questions précédentes, la suite de terme général $\ln\left(\sqrt{n}u_n\right)$ converge, donc, par continuité de l'exponentielle, la suite $(\sqrt{n}u_n)$ converge, donc, en la multipliant par $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ qui tend vers 0, on a $\lim(u_n) = 0$.

5. En s'inspirant du cas $\lambda = \dfrac{1}{2}$ traité précédemment, on a $v_n > 0$ et :

$$\ln(v_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda} + \sum_{k=1} w'_k \text{ avec } w'_k = \ln\left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda}\right) - \frac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2k^{2\lambda}}.$$

Comme la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda}$ converge pour toute valeur de λ, par comparaison de $\sum w'_k$ avec une série de Riemann, la suite de terme général $\ln(v_n)$ converge si et seulement si $2\lambda > 1$, et sinon sa somme partielle tend vers $-\infty$. Dans le premier cas, la suite (v_n) converge vers une limite strictement positive ; dans le second cas elle tend vers 0.

Exercice 1.18.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé. On note $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire euclidien usuel de $\mathbb{R}^n$, $||\ ||$ la norme euclidienne associée et $E = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

On définit une application F sur E par :

$$\forall x \in E, \quad F(x) = \frac{\langle \varphi(x), x\rangle}{||x||^2}$$

1. a) Justifier que F est de classe C^2 sur E et montrer que son gradient en tout point $x \in E$ s'écrit :

$$\nabla(F)(x) = \frac{2\,\varphi(x)}{||x||^2} - \langle \varphi(x), x\rangle \frac{2\,x}{||x||^4}.$$

b) Déterminer l'ensemble des points critiques de F.

2. Justifier l'existence de $m = \inf\limits_{x\in E} F(x)$ et $M = \sup\limits_{x\in E} F(x)$, puis les déterminer.

On remarquera que $F(x) = \Big\langle \dfrac{\varphi(x)}{||x||}, \dfrac{x}{||x||} \Big\rangle$.

3. a) Soit u un point critique de F, soit h un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ et soit g l'application définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telle que :

$$g : t \mapsto F(u + t\,h)$$

Expliciter le développement limité à l'ordre 2 de g en 0, et en déduire que la matrice hessienne de F au point u est :

$$\nabla^2(F)(u) = \frac{2}{||u||^2}\Big(A - F(u)\,I_n\Big)$$

où I_n représente la matrice identité d'ordre n.

b) En déduire la nature de tous les points critiques de F.

Solution :

1. a) On a $F(x) = \dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX}$, donc $F \in C^2(E, \mathbb{R})$ comme quotient de fonctions polynomiales de dénominateur ne s'annulant pas sur E.

Par DL_1 de $g : x \mapsto \langle \varphi(x), x\rangle$, de $h : x \mapsto ||x||^2 = \langle x, x\rangle$ et identification, on obtient :

$$\nabla(g)(x) = 2\,\varphi(x) \quad \text{et} \quad \nabla(h)(x) = 2\,x$$

d'où :

$$\nabla(F)(x) = \frac{2\,\varphi(x)}{||x||^2} - \langle \varphi(x), x\rangle\,\frac{2\,x}{||x||^4}$$

b) Donc $\nabla(F)(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = F(x)\,x$. D'où $x \neq 0$ est un vecteur propre de φ.

Or A est symétrique réelle, donc diagonalisable, et x vecteur propre associé à λ vérifie $\varphi(x) = \lambda\,x$, donc $F(x) = \lambda$.

2. Si S est la sphère unité de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$F(x) = \Big\langle \frac{\varphi(x)}{||x||}, \frac{x}{||x||} \Big\rangle \quad \text{donc} \quad m = \inf_{y\in S}\langle \varphi(y), y\rangle \quad \text{et} \quad M = \sup_{y\in S}\langle \varphi(y), y\rangle$$

existent car $y \mapsto \langle \varphi(y), y\rangle$ est continue sur S fermée bornée.

Les extrema de F sur E ouvert sont parmi les points critiques, c'est-à-dire les vecteurs propres de φ, pour lesquels $F(x) = \lambda$ valeur propre associée ; d'où le min (resp. max) est atteint aux vecteurs propres associés à la valeur propre λ_1 minimale (resp. λ_n maximale.)

3. a) On a :

$$f(t) = \frac{\langle \varphi(u), u\rangle + 2\,t\,\langle \varphi(u), v\rangle + t^2\,\langle \varphi(v), v\rangle}{||u||^2\,\left[\,1 + \dfrac{2\,t}{||u||^2}\,\langle u, v\rangle + \dfrac{t^2}{||u||^2}\,||v||^2\,\right]}$$

$$= \frac{\langle \varphi(u), u\rangle + 2\,t\,\langle \varphi(u), v\rangle + t^2\,\langle \varphi(v), v\rangle}{||u||^2}\left[1 - \frac{2\,t}{||u||^2}\,\langle u, v\rangle - \frac{t^2}{||u||^2}\,||v||^2 + \frac{4\,t^2}{||u||^4}\,(\langle u, v\rangle)^2 + o(t^2)\right]$$

$$= F(u) + 2\,t\,\left[\frac{\langle \varphi(u), v\rangle}{||u||^2} - \frac{F(u)}{||u||^2}\,\langle u, v\rangle\right] + $$

$$+\ t^2\,\left[F(u)\,\frac{4\,(\langle u, v\rangle)^2}{||u||^4} - F(u)\,\frac{||v||^2}{||u||^2} - \frac{4\,\langle \varphi(u), v\rangle\,\langle u, v\rangle}{||u||^4} + \frac{\langle \varphi(v), v\rangle}{||u||^2}\right] + o(t^2)$$

d'où par unicité du DL_2,

$$\langle \nabla^2(F)(u)(v), v\rangle = 2\,\left[F(u)\,\frac{4\,(\langle u, v\rangle)^2}{||u||^4} - F(u)\,\frac{||v||^2}{||u||^2} - \frac{4\,\langle \varphi(u), v\rangle\,\langle u, v\rangle}{||u||^4} + \frac{\langle \varphi(v), v\rangle}{||u||^2}\right]$$

avec $F(u) = \lambda$ si u est un vecteur propre associé à λ, donc :

$$\langle \nabla^2(F)(u)(v), v\rangle = 2\,\left[-\frac{F(u)}{||u||^2}\,\langle v, v\rangle + \frac{\langle \varphi(v), v\rangle}{||u||^2}\right] \quad \text{d'où} \quad \nabla^2(F)(u) = \frac{2}{||u||^2}\Big(A - F(u)\,I_n\Big)$$

b) Pour u (resp. v) vecteur propre normé associé à λ (resp. λ'), on a :

$$\langle \nabla^2(F)(u)(v), v\rangle = 2\,(\lambda' - \lambda)$$

qui change de signe (en choisissant λ' de part et d'autre de λ) si λ n'est pas l'une des valeurs extrêmes λ_1 ou λ_n.

Exercice 1.19.

Soit f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par : $\forall\, x \in\,]1, +\infty[,\ f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$.

1. a) Étudier les variations et le comportement aux bornes du domaine de définition de la fonction f.

b) Représenter le graphe de la fonction f.

2. a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ est convergente.

b) En utilisant les changements de variable $u \mapsto \dfrac{1}{u}$ puis $u \mapsto \cos(u)$ que l'on justifiera, établir la relation :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\pi}{2}$$

3. Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k\sqrt{k^2-n^2}}$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, le réel S_n est bien défini.

b) Établir pour tout entier naturel n non nul, l'encadrement suivant :

$$nS_n - \frac{1}{n}f((n+1)/n) \leqslant \int_{1+1/n}^{+\infty} f(t)dt \leqslant nS_n$$

c) En déduire un équivalent de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution :

1. a) La fonction f est décroissante (comme produit de fonctions positives décroissantes), à valeurs positives.
On a $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. De plus, f est continue et dérivable.
b) Laissé au lecteur possédant un outil graphique sous la main.

2. a) La fonction f est continue sur $]1, +\infty[$ et à valeurs positives. De plus $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$ dont l'intégrale est convergente sur $[2, +\infty[$ d'après les intégrales de Riemann.

Également, $f(x) \underset{V_1}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-x}}$ dont l'intégrale converge qui sur $]1, 2]$ d'après les intégrales de Riemann.
b) Comme $u \mapsto \dfrac{1}{u}$ est C^1 et strictement décroissante sur $]0, 1[$ et $u \mapsto \cos(u)$ est C^1 et strictement décroissante sur $]0, \pi/2[$, l'intégrabilité précédente est préservée et on a :

$$\int_1^{+\infty} f(t)dt = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

3. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $\dfrac{1}{k\sqrt{k^2-n^2}} \sim \dfrac{1}{k^2}$ lorsque $k \to +\infty$, alors $\sum \dfrac{1}{k\sqrt{k^2-n^2}}$ converge et S_n est bien défini.

b) D'après la définition de f, on a :

$$S_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k/n).$$

Comme f est décroissante, pour tout $t \in [k/n, (k+1)/n]$, on a :

$$f((k+1)/n) \leqslant f(t) \leqslant f(k/n)$$
$$\frac{1}{n}\sum_{k=n+2}^{N+1} f(k/n) \leqslant \int_{1+1/n}^{N/n+1/n} f(t)dt \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{N} f(k/n).$$

Comme $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$, la suite $(S_{n,N})_N$ est croissante et majorée par $\int_{1+1/n}^{+\infty} f(t)dt$ qui est convergente.
Ainsi, en passant à la limite dans l'inégalité, on obtient :

$$nS_n - \frac{1}{n}f((n+1)/n) \leqslant \int_{1+1/n}^{+\infty} f(t)dt \leqslant nS_n$$
$$\frac{1}{n}\int_{1+1/n}^{+\infty} f(t)dt \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{n}\int_{1+1/n}^{+\infty} f(t)dt + \frac{1}{n^2}f((n+1)/n).$$

c) Comme f admet une intégrale convergente sur $]1,+\infty[$ et $f((n+1)/n) \sim \sqrt{\frac{n}{2}}$, alors (S_n) converge vers 0 et $S_n \sim \frac{\pi}{2n}$.

Exercice 1.20.

Soit une fonction $f : [0,1] \to [0,1]$ de classe C^2 et telle que :

$$f' \geqslant 0,\ f'' \geqslant 0,\ f(1) = 1,\ f'(0) < 1,\ f''(1) > 0$$

On note m le réel $f'(1)$ et on note $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par : $u_0 = 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Donner un exemple de fonction f satisfaisant aux diverses contraintes.

2. a) Montrer que 1 est l'unique antécédent de 1 par f.
b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \neq 1$.

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et converge vers un réel noté ℓ.

4. Montrer que l'ensemble $J = \{x \in [0,1], f(x) = x\}$ admet une borne inférieure α puis que $f(\alpha) = \alpha$.

5. Montrer que $\ell = \alpha$.

On suppose désormais que $0 < m < 1$.

6. Montrer que $\alpha = 1$

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = 1 - u_n$.
On suppose établie la convergence absolue de la série de terme général v_n.

a) Établir la convergence de la série :

$$\sum_{n\geqslant 0} \ln\left(\frac{m^{-(n+1)}v_{n+1}}{m^{-n}v_n}\right)$$

b) En déduire l'existence d'une constante $K > 0$ telle que $v_n \sim K \times m^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution :

1. Par exemple : $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{e - 1}$.

2. a) Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe $\beta \in [0, 1[$ tel que $f(\beta) = 1$. La croissance de f ($f' \geqslant 0$) entraîne que f est constante sur $[\beta, 1]$ d'où $f' = f'' = 0$ sur $[\beta, 1]$ ce qui est en contradiction avec la donnée $f''(1) > 0$. Donc $f^{-1}(1) = \{1\}$.

b) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: on a $u_0 = 0 \neq 1$, si on suppose $u_n \neq 1$ alors $u_{n+1} = f(u_n) = 1$ est absurde car $u_n \neq 1$ serait un antécédent de 1.

3. On établit par une récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
On a $u_0 = 0 \Rightarrow 0 = u_0 \leqslant u_1 = f(u_0) \leqslant 1$ car f est croissante et à valeurs dans $[0, 1]$. De même : si $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$ alors $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$ et $[f(u_n), f(u_{n+1})] \subset [0, 1]$.
La suite réelle $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est croissante et majorée, elle converge donc vers un réel $\ell \in [0, 1]$

4. L'ensemble J est non vide ($f(1) = 1$) et minoré (par 0, car $J \subset [0, 1]$) donc il admet une borne inférieure α.
Soit $(\alpha_n) \in J^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = \alpha$. Alors, par continuité de f, $f(\alpha) = \lim\limits_{n \to +\infty} f(\alpha_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = \alpha$.

5. On a bien $u_0 = 0 \leqslant \alpha$ et si $u_n \leqslant \alpha$ alors la croissance de f entraîne que $u_{n+1} = f(u_n) \leqslant f(\alpha) = \alpha$. On a donc montré par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \alpha$, d'où, par passage à la limite : $\ell \leqslant \alpha$. Par ailleurs, $f(\ell) = \ell$ (car f est continue) donc nécessairement : $\ell = \alpha$ (unique point fixe de $J \cap [0, \alpha]$).

6. Ici $m < 1$. On pose $g = f - Id$, alors : $g'(x) = f'(x) - 1$ et $g''(x) = f''(x) \geqslant 0$. Donc g' est croissante et majorée par $g'(1) = m - 1 < 0$ donc $g' < 0$ sur $[0, 1]$.
On a $g(\alpha) = g(1) = 0$, si $\alpha < 1$, on peut appliquer le théorème de Rolle à g sur $[\alpha, 1]$: il existe $\beta \in [0, 1], g'(\beta) = 0$ incompatible avec $g' < 0$ sur $[0, 1]$. Donc $\alpha = 1$.

7. a) Il vient $u_{n+1} = f(u_n) = f(1 - v_n) = f(1) - v_n f'(1) + \dfrac{v_n^2}{2} f''(1) + o(v_n^2)$ par application de la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 au point 1.
D'où $1 - v_{n+1} = 1 - m v_n + \dfrac{v_n^2}{2} f''(1) + o(v_n^2)$, et $\dfrac{v_{n+1}}{m v_n} = 1 - \dfrac{v_n}{2m} f''(1) + o(v_n)$ entraîne

$$\ln\left(\frac{m^{-(n+1)} v_{n+1}}{m^{-n} v_n}\right) = \ln\left(\frac{v_{n+1}}{m v_n}\right) \sim \frac{f''(1)}{2m} v_n$$

qui est le terme général d'une série convergente, d'où la convergence de la série
$\sum \ln\left(\dfrac{m^{-(n+1)} v_{n+1}}{m^{-n} v_n}\right)$ vers un réel S

b) On a

$$\sum_{k=0}^{N-1} \ln\left(\frac{m^{-(n+1)}v_{n+1}}{m^{-n}v_n}\right) = \ln\prod_{k=0}^{N-1}\frac{m^{-(n+1)}v_{n+1}}{m^{-n}v_n} = \ln(v_N) - \ln(v_0) - N\ln(m) = \ln\left(\frac{v_N}{v_0.m^N}\right)$$

On a $\lim\limits_{N\to+\infty} \ln\left(\frac{v_N}{v_0.m^N}\right) = S \Rightarrow \lim\limits_{N\to+\infty}\frac{v_N}{v_0.m^N} = e^S \Rightarrow v_N \sim e^S m^N$.