PRÉPARATION AUX ORAUX DE MATHÉMATIQUES : ALGÈBRE

1. Espaces vectoriels - Applications linéaires

Exercice 1. (ESCP 2019) Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie et soient a et b deux réels distincts. On note Id_E l'application identité de E. Dans tout l'exercice, f désigne un endomorphisme de E vérifiant la relation :

$$f^2 - (a+b)f + ab\mathrm{Id}_E = 0. \quad (*)$$

(1) Quelles sont les homothéties vérifiant la relation $(*)$?

(2) (a) Déterminer une condition suffisante portant sur les 2 réels a et b pour que f soit bijective. Calculer alors f^{-1}.

(b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur les 2 réels a et b pour que f soit un projecteur sans être une homothétie.

On suppose désormais que f n'est pas une homothétie.

(3) (a) Déterminer deux réels λ et μ tels que : $f = \lambda(f - a\mathrm{Id}_E) + \mu(f - b\mathrm{Id}_E)$.

(b) En déduire qu'il existe deux projecteurs p et q tels que $f = bp + aq$ et $q \circ p = p \circ q = 0$.

(4) On suppose désormais que a et b sont non nuls. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$f^n = b^n p + a^n q \quad (**)$$

Pour tout entier $n > 0$, si f est bijective, on définit f^{-n} par $f^{-n} = (f^{-1})^n$. La relation $(**)$ est-elle vérifiée pour tout $n \in \mathbb{Z}$?

Exercice 2. (ESCP 2019) Soient n, m deux entiers tels que $n \geq 1$ et $k \geq 2$. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Le rang d'un endomorphisme f de E est noté $\mathrm{rg}(f)$ et Id_E désigne l'endomorphisme identité de E. Enfin, on note $0_{\mathcal{L}(E)}$ l'endomorphisme nul de E.

(1) Soient $F_1, F_2, \dots, F_k$ des sous-espaces vectoriels de E vérifiant $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_k$. Pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, on note p_i le projecteur de E sur F_i parallèlement au sous-espace $G_i = \bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} F_j$.

(a) Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \mathrm{rg}(p_i) = n$.

(b) Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} p_i = \mathrm{Id}_E$.

(c) Montrer que pour tout couple $(i, j) \in [\![1, k]\!]^2$ vérifiant $i \neq j$, on a: $p_j \circ p_i = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

(2) Dans cette question, soient $q_1, q_2, \dots, q_k$ des endomorphismes de E tous non nuls et tels que:

$$q_1 + q_2 + \cdots + q_k = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}(q_1) + \mathrm{rg}(q_2) + \cdots + \mathrm{rg}(q_k) \leq n.$$

(a) Montrer que $E = \mathfrak{Im}(q_1) \oplus \mathfrak{Im}(q_2) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{Im}(q_k)$.

(b) Montrer que, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, l'endomorphisme q_i est un projecteur de E et que, pour tout couple $(i, j) \in [\![1, k]\!]^2$ vérifiant $i \neq j$, on a : $q_i \circ q_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

(c) Montrer que, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, q_i est le projecteur sur $\mathfrak{Im}(q_i)$ parallèlement à $K_i = \bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \mathfrak{Im}(q_j)$.

Exercice 3. (ESCP 2019) Soit E un espace vectoriel de dimension $n > 0$ et soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

(1) On suppose que, pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée. Montrer que, si $u \neq 0$, alors u est une homothétie, c'est-à-dire qu'il existe un réel $\lambda \neq 0$ tel que $u = \lambda \mathrm{Id}_E$ (*indication : calculer la matrice de u dans une base quelconque de E*).

On rappelle (ou on admet) que la trace de la matrice d'un endomorphisme u est indépendante de *la base dans laquelle l'endomorphisme est écrit. On la note* $\mathrm{tr}(u)$. Dans toute la suite, u désigne un endomorphisme non nul de E, de trace nulle.

(2) Montrer qu'il existe un vecteur x_0 tel que la famille $(x_0, u(x_0))$ soit libre, puis un sous-espace F de E, supplémentaire de $\mathrm{Vect}(x_0)$ dans E et contenant $u(x_0)$.

On note p la projection de E sur F parallèlement à $\mathrm{Vect}(x_0)$.

(3) (a) Montrer que F est stable par $p \circ u$ et que l'endomorphisme induit par $p \circ u$ sur F est de trace nulle.
(b) En utilisant un raisonnement par récurrence, montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u a tous ses éléments diagonaux nuls.
(c) En déduire que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice dont tous les éléments diagonaux sont nuls.

Exercice 4. (ESCP 2022) Soit n un entier ≥ 1. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n. Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on désigne par $\ker(M)$ et $\mathfrak{Im}(M)$ le noyau et l'image de M, c'est-à-dire :

$$\ker(M) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ MX = 0\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{Im}(M) = \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ Y = MX\}.$$

Enfin, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_k = \dim(\ker(A^k))$ et $w_k = \dim(\mathfrak{Im}(A^k))$.

(1) Montrer que $\ker(A^k) \subset \ker(A^{k+1})$ pour tout $k \geq 1$. En déduire que la suite $(v_k)_{k\geq 1}$ est croissante.
(2) Montrer que la suite $(w_k)_{k\geq 1}$ est décroissante.
(3) Supposons qu'il existe un entier $k_0 \geq 1$ tel que $v_{k_0+1} = v_{k_0}$. Montrer que $v_{k_0+2} = v_{k_0+1}$. Que peut-on alors dire des suites d'entiers $(v_k)_{k\geq k_0}$ et $(w_k)_{k\geq k_0}$?

Pour le reste de l'exercice, on définit les notions suivantes. Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *nilpotente* s'il existe un entier $m \geq 1$ tel que $M^m = 0$. Etant donnée une matrice nilpotente $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit son *indice de nilpotence* par :

$$p = \min\{m \in \mathbb{N}^*,\ M^m = 0\}.$$

(4) Donner trois exemples de matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, une pour $p = 1$, une pour $p = 2$ et une pour $p = 3$.
(5) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente. Montrer que $p \leq n$.
(6) Soit n un entier ≥ 2. Soit $B = (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $b_{i,i+1} = 1$ si $i \in [\![1, n-1]\!]$ et $b_{i,j} = 0$ si $j \neq i+1$. Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation d'inconnue M donnée par $M^2 = B$ (*indication : calculer l'indice de nilpotence de* B).

Exercice 5. (QSP HEC 2017) Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, soit F un sous-espace vectoriel de E et soit q un projecteur de E. Montrer que F est stable par q si et seulement si $F = (F \cap \ker(q)) \oplus (F \cap \mathfrak{Im}(q))$.

2. Diagonalisation

Exercice 6. (ESCP 2017) Soit n un entier ≥ 2 et posons $E = \mathbb{R}_n[x]$. On considère la famille $\mathcal{F} = (P_0, ..., P_n)$ de polynômes de E, définie par $P_0 : x \longmapsto 1$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ par :

$$P_k : x \longmapsto \frac{x(x-k)^{k-1}}{k!}.$$

(1) Justifier que $\mathcal{F}$ est une base de E.
(2) Vérifier que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $P'_k(x+1) = P_{k-1}(x)$.
(3) Soit f l'application qui, à tout $P \in E$, associe le polynôme $Q : x \longmapsto P(x) - P'(x+1)$.
(a) Prouver que f est un endomorphisme de E, et donner sa matrice A dans la base $\mathcal{F}$. Justifier que f est un isomorphisme de E dans E.
(b) L'endomorphisme f est-il diagonalisable? Quels sont ses sous-espaces propres?
(c) Déterminer la matrice inverse de A.
(4) Montrer que, pour tout $P \in E$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a :

$$f^m(P)(x) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} P^{(i)}(x+i).$$

Exercice 7. (ESCP 2019) Soit n un entier ≥ 2 et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée. Soit T l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad T(M) = AM.$$

(1) Montrer que T est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
(2) Montrer que T est bijectif si et seulement si la matrice A est inversible.
(3) Dans cette question, on suppose que la matrice A est diagonalisable. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres et soit $(X_1, \dots, X_n)$ une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on pose $M_{i,j} = X_i {}^tX_j$. Montrer que la famille $(M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de T.
(4) Dans cette question, on suppose que A admet au moins une valeur propre μ et donc un vecteur propre X associé. On suppose que T est diagonalisable. Soit $(M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de T.
   (a) Soit Φ l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\Phi(M) = MX$. Montrer que Φ est surjective de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   (b) En déduire que A est diagonalisable (*indication : utiliser la famille* $(M_{i,j}X)_{1 \leq i,j \leq n}$).

Exercice 8. (ESCP 2021) Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, et soient a, b deux vecteurs de E tels que la famille (a,b) soit libre.

(1) Que peut-on dire de l'entier n?
(2) Soient α, β deux applications de E dans $\mathbb{R}$. A quelle condition nécessaire et suffisante sur α et β l'application u définie pour tout $x \in E$ par $u(x) = \alpha(x)a + \beta(x)b$ est-elle un endomorphisme de E?

   Par la suite, on suppose que α et β sont linéaires, non identiquement nulles et que $\ker(\alpha) \neq \ker(\beta)$.

(3) Quelles sont les dimensions respectives de $\ker(\alpha)$ et $\ker(\beta)$?
(4) Rappeler la formule de Grassmann, puis montrer que le rang de u est égal à 2.
(5) Montrer que u est diagonalisable si et seulement si la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha(a) & \alpha(b) \\ \beta(a) & \beta(b) \end{pmatrix}$$

   est diagonalisable et n'admet pas 0 comme valeur propre (*indication ; vérifier que, si x est vecteur propre de u pour une valeur propre non nulle, alors x appartient à* $\mathfrak{Im}(u) = \mathrm{Vect}(a,b)$).
(6) Soit p un entier ≥ 2 et soit v l'application qui, à tout $P \in \mathbb{R}_p[x]$, associe le polynôme $Q : x \longmapsto xP'(0) + x^p P'(1)$. Etudier le caractère diagonalisable et donner les valeurs propres de v.

Exercice 9. (ESCP 2021) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer le rang de f, puis déterminer une base de $\ker(f)$.
(2) Calculer A^2 et son rang.
(3) Déterminer une base de $\ker(f^2)$.
(4) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(f^2) \oplus \ker(f - 2\mathrm{Id})$.
(5) En déduire le spectre de f et un polynôme annulateur de f.
(6) En déduire aussi que A est semblable à la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10. (QSP ESCP 2022) Soit n un entier ≥ 2, et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2(A-I) = 0$ et $A(A-I) \neq 0$. La matrice A est-elle diagonalisable?

Exercice 11. (QSP ESCP 2022) Soit n un entier ≥ 2, et soit φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $\varphi(M) = {}^tM$. Calculer la trace de φ.

Exercice 12. (HEC 2015) Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

(1) Question de cours : Soit f un endomorphisme de E, soit x un vecteur propre de f associé à la valeur propre θ et soit $P \in \mathbb{R}[x]$. Exprimer $P(f)(x)$ en fonction de P, θ, x. Montrer que toute valeur propre

de f est racine de tout polynôme annulateur de f.

Dans toute la suite de l'exercice, on désigne par f un endomorphisme de E. On se donne deux réels λ et μ non nuls et distincts, ainsi que deux endomorphismes u et v de E, non nuls, tels que :

$$f = \lambda u + \mu v, \quad f^2 = \lambda^2 u + \mu^2 v, \quad f^3 = \lambda^3 u + \mu^3 v.$$

(2) (a) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}_3[x]$ tel que $P(0) = 0$, on a : $P(f) = P(\lambda)u + P(\mu)v$.
(b) En déduire un polynôme annulateur P_0 de f. Que peut-on dire du spectre de f?
(3) (a) Trouver des polynômes $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}_2[x]$ tels que $u = Q_1(f)$ et $v = Q_2(f)$.
(b) Montrer que $u \circ v = v \circ u = 0$ et que u et v sont des projecteurs de E (*indication : pour cette dernière propriété, on pourra effectuer la division euclidienne de Q_1^2 par P_0*).
(4) (a) A l'aide de la formule de Grassmann, montrer que :

$$\dim(\ker(u) \cap \ker(v)) + \dim(\mathfrak{Im}(u)) + \dim(\mathfrak{Im}(v)) \geq \dim(E).$$

(b) En déduire que f est diagonalisable et préciser ses sous-espaces propres.
(5) (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $f^k = \lambda^k u + \mu^k v$.
(b) Montrer que f est bijective si et seulement si $\ker(u) \cap \ker(v) = \{0\}$.
(c) Montrer que f est bijective si et seulement si $u + v = \mathrm{Id}_E$.
(d) Montrer que, si f est bijective, alors on a $f^k = \lambda^k u + \mu^k v$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 13. (QSP HEC 2018) Soit n un entier ≥ 2. On dit qu'une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *nilpotente* s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $M^k = 0$. Dans ce cas, on appelle *indice de nilpotence* de M le plus petit entier strictement positif k tel que $M^k = 0$.

(1) (a) Donner un exemple de matrice nilpotente non nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
(b) Démontrer que la seule matrice nilpotente et diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice nulle.
(2) Dans cette question, on considère la fonction Python suivante qui calcule l'indice de nilpotence d'une matrice nilpotente a :

```
def indnilp(a):
    k=1
    b=a
    while np.sum(np.abs(b))>0:
        k=-------
        b=-------
    return k
```

(a) Expliquer en détails la ligne de code `while np.sum(np.abs(b))>0`.
(b) Compléter la fonction Python ci-dessus.

Exercice 14. (QSP HEC 2019) Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^3 + f = 0$ et $\mathrm{rg}(f) = 2$. Déterminer le spectre de f et les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ qui sont stables par f.

3. Algèbre bilinéaire

Exercice 15. (ESCP 2019) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et on note $\|.\|$ la norme euclidienne canonique. On désigne par $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ et par $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|u(x)\| \leq \|x\|.$$

(1) Soit $y \in \ker(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) \cap \mathfrak{Im}(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad y = \frac{1}{k}(u^k(x) - x),$$

où $u^k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ désigne l'endomorphisme $u \circ u \circ \ldots \circ u$ (composé k fois).
(2) En déduire que $\ker(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) \cap \mathfrak{Im}(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) = \{0\}$.
(3) Conclure que $\ker(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) \oplus \mathfrak{Im}(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) = \mathbb{R}^n$.

Par la suite, on dit qu'une suite $(z_N)_N$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ converge vers $z \in \mathbb{R}^n$ (que l'on note $\lim\limits_{N \to +\infty} z_N = z$) si $\lim\limits_{N \to +\infty} \|z_N - z\| = 0$.

(4) Soit $y \in \ker(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$. Étudier la limite de la suite $\left(\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} u^k(y)\right)_{N \geq 1}$.

(5) Soit $y \in \mathfrak{Im}\,(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$. Étudier la limite de la suite $\left(\dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} u^k(y) \right)_{N \geq 1}$.

(6) En déduire que pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u^k(y) = p(y),$$

où p est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ que l'on caractérisera.

Exercice 16. (ESCP 2019) Soit p un entier ≥ 2. On considère l'espace $E = \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique et de la norme euclidienne associée notés respectivement $\langle\ ,\ \rangle$ et $\|.\|$. On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de E. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

(1) Montrer que les valeurs propres de la matrice ${}^tAA$ sont toutes positives.

Par la suite, on note c la plus grande des valeurs propres de ${}^tAA$.

(2) (a) Montrer que pour tout $X \in E$, on a $||AX||^2 \leq c||X||^2$.
(b) Etablir, pour tout couple (X, Y) de vecteurs de E et tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité suivante :

$$|\langle A^k X, Y \rangle| \leq c^{\frac{k}{2}} \|X\| \times \|Y\|.$$

(3) On dit qu'une suite de matrices $(U_n)_{n \geq 0}$ converge vers une matrice U si chacun des coefficients de U_n converge vers le coefficient de U correspondant.
(a) Soit $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$. Montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k \geq 0} \frac{\langle A^k e_j, e_i \rangle}{k!}$.
(b) On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice B_n par :

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k.$$

Montrer que la suite (B_n) converge vers une matrice notée C.
(c) Exprimer les valeurs propres de C en fonction des valeurs propres de A.

Exercice 17. (ESCP 2019) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $s = a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -b & a \\ b & 0 & -c \\ -a & c & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer $\ker(f)$ et montrer que $\mathrm{Im}(f) = (\ker f)^\perp$.
(2) (a) Vérifier que $P : x \longmapsto x^3 + sx$ est un polynôme annulateur de A.
(b) La matrice A est-elle diagonalisable?
(3) On note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $C = A^2 + sI_3$.
(a) Déterminer $\ker(g)$ et $\mathfrak{Im}(g)$.
(b) Dans cette question uniquement, on suppose que $s = 1$. Quelle est la nature de g?
(c) A quelle condition nécessaire et suffisante sur $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice $B = A + \lambda I_3$ est-elle inversible? Dans ce cas, expliciter la matrice inverse B^{-1} de B comme un polynôme en A.

Exercice 18. (ESCP 2021) Soit E un espace euclidien de dimension ≥ 1, muni de son produit scalaire noté $\langle\ ,\ \rangle$ et de sa norme euclidienne notée $\|\ \|$. Soient u, v des endomorphismes de E.

(1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $\lambda \in \mathrm{Sp}(u \circ v)$ si et seulement si $\lambda \in \mathrm{Sp}(v \circ u)$.
(2) Montrer que $0 \in \mathrm{Sp}(u \circ v)$ si et seulement si $0 \in \mathrm{Sp}(v \circ u)$.
(3) Que peut-on en conclure sur $\mathrm{Sp}(u \circ v)$ et $\mathrm{Sp}(v \circ u)$?
(4) Dans cette question, on suppose que u et v sont des endomorphismes symétriques qui commutent.
(a) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. On pose $F = \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$. Montrer que F et $F^\perp$ sont stables par v.
(b) Montrer que les endomorphismes u et v sont co-diagonalisables dans une base orthonormée, c'est-à-dire qu'il existe une base orthonormée de vecteurs propres commune à u et v (*on pourra procéder par récurrence sur la dimension de E*).

Exercice 19. (ESCP 2021) Soit E un espace euclidien de dimension ≥ 2 et soit u un vecteur unitaire de E. On note $\langle\ ,\ \rangle$ son produit scalaire. Pour tous réels a, b tels que $a \neq 0$ et pour tout $x \in E$, on pose $f_{a,b}(x) = a\langle x, u\rangle u + bx$.

(1) Montrer que $f_{a,b}$ est un endomorphisme symétrique de E.
(2) Préciser le spectre de $f_{a,b}$.
(3) Pour quelle(s) valeur(s) de a et b l'endomorphisme $f_{a,b}$ est-il un projecteur?
(4) Lorsque $f_{a,b}$ est bijectif, déterminer la réciproque de $f_{a,b}$.
(5) On considère l'application $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{L}(E)$, $(a, b) \longmapsto f_{a,b}$.
  (a) Montrer que F est une application linéaire.
  (b) Déterminer $\ker(F)$ et le rang de F.

Exercice 20. (HEC 2019) Soit n un entier ≥ 2. On note $S_n(\mathbb{R})$ (resp. $A_n(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dans cet exercice, on se propose de résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation $(\mathcal{E})$: ${}^tM + M^2 = I_n$.

(1) Question de cours : sous-espaces supplémentaires, définition et caractérisations.
(2) Montrer que toute solution de $(\mathcal{E})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possède un polynôme annulateur de degré 4. Qu'en déduit-on sur les valeurs propres d'une solution M de $(\mathcal{E})$?
(3) Soit M une solution de $(\mathcal{E})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
  (a) Montrer que M et ${}^tM$ commutent.
  (b) Justifier l'existence et l'unicité de $(S, A) \in S_n(\mathbb{R}) \times A_n(\mathbb{R})$ tel que $M = S + A$.
  (c) Avec les notations précédentes, montrer que :
$$\begin{cases} AS = SA \\ S + S^2 + A^2 = I_n \\ -A + 2AS = 0 \end{cases} .$$
  (d) Justifier l'existence d'une matrice inversible P telle que $D = P^{-1}SP$ soit diagonale et $A' = P^{-1}AP$ soit antisymétrique.
  (e) Indiquer les relations entre D et A' résultant de la question (3)(c).
  (f) En déduire que $A' = 0$ et préciser les valeurs possibles pour les coefficients diagonaux de D.
(4) Déterminer la forme des solutions de $(\mathcal{E})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 21. (HEC 2021) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[x]^2$, on pose :
$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}dt. \quad (*)$$

(1) Question de cours : Que peut-on dire des sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien?
(2) Justifier que l'intégrale $(*)$ est bien définie, puis prouver que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.
(3) Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(P)(x) = (x^2 - 1)P''(x) + (2x + 1)P'(x)$. Justifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
(4) Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[x]$. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :
$$\int_{-1}^{1}(1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}P''(t)Q(t)dt = \int_{-1}^{1}(2t+1)P'(t)Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}dt - \int_{-1}^{1}(1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}P'(t)Q'(t)dt.$$
En déduire que l'endomorphisme φ est symétrique.
(5) (a) Déterminer les valeurs propres de φ.
  (b) On note $\lambda_0, ..., \lambda_n$ les valeurs propres de φ classées dans l'ordre croissant. Soit P_k un vecteur propre de φ associé à λ_k pour $k \in [\![0, n]\!]$. Montrer que la famille $(P_0, ..., P_n)$ est orthogonale et déterminer le degré de P_k pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
(6) Soit k un entier ≥ 1.
  (a) Montrer que P_k admet au moins une racine d'ordre impair dans $]-1, 1[$.
  (b) On note $a_1, ..., a_r$ les racines d'ordre impair de P_k sur $]-1, 1[$, et soit $S : x \longmapsto (x - a_1)...(x - a_r)$. En considérant la quantité $\langle S, P_k\rangle$, montrer que P_k a k racines distinctes dans $]-1, 1[$.

Exercice 22. (QSP HEC 2022) Soient a, b deux réels tels que $a < b$, et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $f_1, ..., f_n$ des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On considère la matrice $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont les coefficients sont définis pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ par $a_{i,j} = \int_a^b f_i(t)f_j(t)dt$. Montrer que les valeurs propres de A sont toutes positives. A quelle condition sur $f_1, ..., f_n$ sont-elles toutes strictement positives?