

## TRAVAUX DIRIGÉS : SÉRIES NUMÉRIQUES

**Exercice 1.** Etudier la nature des séries données par :

$$\begin{aligned}
 (1) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n + \ln(n)} & \quad , \quad (2) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^n} & \quad , \quad (3) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n 2^n} & \quad , \quad (4) \sum_{n \geq 1} (1 - \sqrt[n]{n}) & \quad , \\
 (5) \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n)}{n^2 \sqrt{n}} & \quad , \quad (6) \sum_{n \geq 1} \left( \frac{\ln(n)}{n} \right)^2 & \quad , \quad (7) \sum_{n \geq 1} n^2 e^{-n} & \quad , \quad (8) \sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n} & \quad , \\
 (9) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right) & \quad , \quad (10) \sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n!} & \quad , \quad (11) \sum_{n \geq 0} e^{-\sqrt{n}} & \quad , \quad (12) \sum_{n \geq 1} \frac{n^2 - 5}{n(2n+1)} & \quad , \\
 (13) \sum_{n \geq 1} \frac{n-2}{2^n - 1} & \quad , \quad (14) \sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{2n+3} & \quad , \quad (15) \sum_{n \geq 0} n \sin\left(\frac{1}{3^n}\right) & \quad , \quad (16) \sum_{n \geq 0} \frac{n}{n+1} & \quad , \\
 (17) \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n!)}{n^3 + \cos(n!)} & \quad , \quad (18) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} & \quad , \quad (19) \sum_{n \geq 1} e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n & \quad , \quad (20) \sum_{n \geq 1} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) & \quad .
 \end{aligned}$$

**Exercice 2.** Etudier la nature des séries  $\sum (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^a$  et  $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n^a}\right)$  en fonction de  $a \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 3.** A l'aide des développements limités, étudier la nature des séries  $\sum 2 \ln(n^3 + 1) - 3 \ln(n^2 + 1)$ ,  $\sum n^2 \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)\right)$  et  $\sum 2 + n \ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right)$ .

**Exercice 4.** Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Montrer que les séries suivantes convergent et calculer leur somme :

$$\begin{aligned}
 (1) \sum_{n \geq 0} \frac{n(n-1)}{3^n} & \quad , \quad (2) \sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{3^n \cdot n!} & \quad , \quad (3) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + n} & \quad , \quad (4) \sum_{n \geq 0} \binom{n}{2} e^{-n} & \quad , \\
 (5) \sum_{n \geq 0} \frac{2}{3^{n+1}} & \quad , \quad (6) \sum_{n \geq 0} \frac{4^n}{(2n)!} & \quad , \quad (7) \sum_{n \geq 0} \frac{2n(n+1)}{4^n} & \quad , \quad (8) \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{n^2 + 3}{5^n} & \quad , \\
 (9) \sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)}{n!} & \quad , \quad (10) \sum_{n \geq 0} \frac{\binom{n}{p}}{n!} & \quad , \quad (11) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} & \quad , \quad (12) \sum_{n \geq 0} \frac{2^n(n^2+1)}{n!} & \quad , \\
 (13) \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n 2^n}{(n+1)!} & \quad , \quad (14) \sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + n + 1}{n!} & \quad , \quad (15) \sum_{n \geq 2} \ln\left(\frac{n^3}{(n+2)(n-1)^2}\right) & \quad , \quad (16) \sum_{n \geq 1} \ln\left(\frac{\cos(\frac{1}{n})}{\cos(\frac{1}{n+1})}\right) & \quad .
 \end{aligned}$$

**Exercice 5.** Montrer que, si la série numérique  $\sum u_n$  converge absolument, alors  $\sum u_n^2$  converge.

**Exercice 6. (Critère spécial des séries alternées)** Etant donnée une suite  $(a_k)_{k \geq 1}$  décroissante de limite nulle, on se propose d'étudier la nature de la série  $\sum_{k \geq 1} (-1)^k a_k$ . Pour ce faire, on pose pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$u_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k a_k \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k a_k.$$

- (1) Etudier la convergence des suites  $(u_n)_{n \geq 1}$  et  $(v_n)_{n \geq 1}$ .
- (2) En déduire que  $\sum_{k \geq 1} (-1)^k a_k$  converge. *Ce résultat est appelé le critère spécial des séries alternées.*
- (3) Etudier la convergence et l'absolue convergence des séries  $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{k}$  et  $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ .
- (4) A l'aide d'un développement limité, montrer que la série  $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+(-1)^k}}$  diverge.

**Exercice 7. (Constante d'Euler)** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$  et  $v_n = u_{n+1} - u_n$ .

- (1) A l'aide d'un développement limité, déterminer un équivalent de  $v_n$  en  $+\infty$ .
- (2) Montrer que la série de terme général  $v_n$  converge.
- (3) En déduire que la suite de terme général  $u_n$  converge.

La limite de cette suite, communément notée  $\gamma$ , est appelée la constante d'Euler. Elle vaut  $\simeq 0.5772$ .

**Exercice 8. (Règle de D'Alembert)** Soit  $(a_n)_{n \geq 1}$  une suite à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe un réel  $l \geq 0$  tel que :  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$ .

- (1) On suppose dans cette question que  $l < 1$ , et soit  $q \in ]l, 1[$  un réel fixé.
  - (a) Justifier qu'il existe un entier  $n_0$  tel que, pour tout  $n \geq n_0$ , on a :  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ .
  - (b) Montrer que, pour tout  $n \geq n_0$ , on a :  $a_n \leq a_{n_0} q^{n-n_0}$ .
  - (c) En déduire que la série  $\sum_{n \geq 1} a_n$  converge.
- (2) On suppose dans cette question que  $l > 1$ , et soit  $q \in ]1, l[$  un réel fixé.
  - (a) Justifier qu'il existe un entier  $n_0$  tel que, pour tout  $n \geq n_0$ , on a :  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q$ .
  - (b) En déduire que la suite  $(a_n)$  est croissante à partir d'un certain rang.
  - (c) Quelle est la nature de la série  $\sum_{n \geq 1} a_n$ ? Justifier.

Les résultats trouvés en (1)(c) et (2)(c) constituent ce que l'on appelle la règle de D'Alembert.

- (3) Etudier la nature de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{1.3 \dots (2n-1)}$ .

**Exercice 9. (ESCP 2009)** Soit  $(a_n)$  une suite réelle décroissante de limite nulle. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $b_n = n(a_{n-1} - a_n)$ . Dans cet exercice, on se propose de comparer la nature des séries  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$ .

- (1) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $\sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k - na_n$ .
- (2) Dans cette question, on suppose que la série de terme général  $a_n$  converge.
  - (a) Montrer que la série  $\sum b_n$  converge, puis que la suite  $(na_n)$  converge.
  - (b) Etablir que la suite  $(na_n)$  tend vers 0, et en déduire que :  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ .
- (3) Dans cette question, on suppose que la série de terme général  $b_n$  converge.
  - (a) Montrer que, pour tous  $n, k \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $n(a_n - a_{n+k}) \leq \sum_{j=n+1}^{n+k} b_j$ .
  - (b) En déduire que la série  $\sum a_n$  converge et que :  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ .

**Exercice 10. (Produit infini - ESCP 2021)** Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite réelle. On dit que le produit  $\prod_{n \geq 1} u_n$  converge si la suite  $(v_n)_{n \geq 1}$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par  $v_n = \prod_{k=1}^n u_k$  admet une limite finie non nulle  $l$ , et l'on pose alors :

$$l = u_1 \times u_2 \times u_3 \times \dots = \prod_{k=1}^{+\infty} u_k.$$

- (1) Dans cette question, on suppose que  $u_n > 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer l'équivalence entre les trois propositions suivantes :
  - (a) le produit  $\prod_{n \geq 1} (1 + u_n)$  converge;
  - (b) la série  $\sum_{n \geq 1} \ln(1 + u_n)$  converge;
  - (c) la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge.
- (2) Dans cette question, on suppose que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est à valeurs  $> -1$  et que la série  $\sum_{n \geq 1} u_n^2$  converge.
  - (a) Montrer qu'il existe  $C > 0$  et  $N \in \mathbb{N}^*$  tels que :  $\forall n \geq N, |\ln(1 + u_n) - u_n| \leq C u_n^2$ .
  - (b) En déduire que le produit  $\prod_{n \geq 1} (1 + u_n)$  converge si et seulement si la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge.
- (3) Dans cette question, pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose  $u_n = \cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$  avec  $x \in ]0, \pi[$  et  $v_n = \prod_{k=1}^n u_k$ .
  - (a) On pose  $w_n = v_n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . A l'aide de la relation  $\sin(2y) = 2 \sin(y) \cos(y)$ , montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$w_n = \frac{\sin(x)}{2^n}.$$

- (b) En déduire la limite de la suite  $(v_n)_{n \geq 1}$ .

- (c) En déduire l'égalité suivante :  $\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \times \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2} \times \dots$

**Exercice 11. (QSP HEC 2014)** Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose :  $u_n = \ln(n) + a \ln(n+1) + b \ln(n+2)$ .

- (1) Déterminer  $a$  et  $b$  pour que la série de terme général  $u_n$  soit convergente (*indication : calculer un développement limité du terme général  $u_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$* ).
- (2) Calculer la somme de cette série dans ce cas.

1. EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

**Exercice 12.** Etudier la nature des séries données par :

$$\begin{aligned}
 (1) \sum_{n \geq 1} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}}{e^{1/n} - 1} \quad , \quad (2) \sum_{n \geq 1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \quad , \quad (3) \sum_{n \geq 2} (\ln(n))^{-\ln(n)} \quad , \\
 (4) \sum_{n \geq 1} n \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad , \quad (5) \sum_{n \geq 1} (-1)^n e^{1/n} \quad , \quad (6) \sum_{n \geq 1} (-1)^n e^{\sqrt{n}-n} \quad , \\
 (7) \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}} \quad , \quad (8) \sum_{n \geq 2} \frac{n^{\ln(n)}}{\ln(n)^n} \quad , \quad (9) \sum_{n \geq 0} \sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} - 2\sqrt{n} \quad .
 \end{aligned}$$

**Exercice 13.** On admet que  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ . Montrer que la série  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2(k+1)^2}$  converge et calculer sa somme.

**Exercice 14. (Formule de Stirling)** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = \frac{n^n e^{-n}}{n!}$  et  $v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ .

- (1) A l'aide d'un développement limité, déterminer un équivalent de  $v_n$  en  $+\infty$ .
  - (2) Montrer que la série de terme général  $v_n$  diverge.
  - (3) En déduire que la suite  $(u_n)$  converge. Quelle est sa limite?
  - (4) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $a_n = u_n \sqrt{n}$  et  $b_n = \ln(a_{n+1}) - \ln(a_n)$ .
    - (a) A l'aide d'un développement limité, déterminer un équivalent de  $b_n$  en  $+\infty$ .
    - (b) Montrer que la série de terme général  $b_n$  converge.
    - (c) En déduire que la suite  $(a_n)$  converge vers un réel  $C > 0$ .
    - (d) En déduire un équivalent de  $n!$  en  $+\infty$  en fonction de  $C, n$ .
- Cet équivalent de  $n!$  en  $+\infty$  est appelée la formule de Stirling, et l'on peut montrer que  $C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ .*

**Exercice 15.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t) dt$ .

- (1) (a) Calculer les valeurs de  $u_0, u_1, u_2$ .
- (b) Etudier la monotonie de la suite  $(u_n)$ , et en déduire qu'elle converge.
- (c) Calculer  $u_{n+2} + u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et en déduire la limite de  $(u_n)$ .
- (2) (a) Montrer que, pour tout entier  $n \geq 2$ , on a :  $\frac{1}{2(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$ .
- (b) En déduire un équivalent de  $u_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .
- (c) En déduire la nature de la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$ .
- (3) (a) A l'aide de la question (1)(c), montrer que, pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$  :

$$u_{2p} = (-1)^p \left( u_0 + \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^k}{2k-1} \right) \quad \text{et} \quad u_{2p+1} = (-1)^p \left( u_1 + \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^k}{2k} \right).$$

- (b) En déduire que les séries  $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{2k-1}$  et  $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{k}$  convergent et donner leurs sommes.

**Exercice 16. (Produit de Cauchy)** Etant données deux suites réelles  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à termes positifs, on considère la suite réelle  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par :

$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}.$$

- (1) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\sum_{k=0}^n w_k \leq \left( \sum_{k=0}^n u_k \right) \left( \sum_{k=0}^n v_k \right) \leq \sum_{k=0}^{2n} w_k.$$

- (2) En déduire que, si les séries  $\sum_{k \geq 0} u_k$  et  $\sum_{k \geq 0} v_k$  convergent, de sommes respectives  $U$  et  $V$ , alors la série  $\sum_{k \geq 0} w_k$  converge, de somme  $UV$ .
- (3) Pour tout  $n \geq 0$ , on pose  $w_n = 2^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{4^k}{k!}$ . Montrer que  $\sum_{n \geq 0} w_n$  converge et calculer sa somme.

**Exercice 17. (ESCP 2014)** Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  la suite définie par  $f_0 = f_1 = 1$  et :  $\forall n \in \mathbb{N}, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ .

- (1) Soit  $\sum_{n \geq 0} a_n$  une série à termes strictement positifs telle que la suite  $(\frac{a_{n+1}}{a_n})_{n \geq 0}$  converge vers un réel  $l < 1$ . Montrer que la série  $\sum_{n \geq 0} a_n$  converge.
- (2) Montrer que la suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  est à valeurs strictement positives.
- (3) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$ .
  - (a) Expliciter une fonction rationnelle  $\varphi$  telle que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \varphi(u_n)$ .
  - (b) Déterminer le sens de variation de  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- (4) (a) Montrer que les suites  $(u_{2n})_{n \geq 1}$  et  $(u_{2n+1})_{n \geq 1}$  sont monotones et convergentes, et déterminer leurs limites respectives.
  - (b) En déduire que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  converge vers  $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  (que l'on appelle le nombre d'or).
- (5) On pose  $R = \frac{1}{\Phi}$ . De plus, pour tout réel  $x$  pour lequel la série  $\sum_{n \geq 0} f_n x^n$  converge, on pose :

$$A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n x^n, \quad A_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n x^{n+2}, \quad A_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_{n+1} x^{n+2}, \quad A_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_{n+2} x^{n+2}.$$

- (a) Montrer que, pour tout  $x \in ]-R, R[$ , la série définissant  $A(x)$  converge absolument.
- (b) Exprimer  $A_0(x), A_1(x), A_2(x)$  en fonction de  $A(x)$  pour tout  $x \in ]-R, R[$ .
- (c) En déduire l'expression de  $A(x)$  en fonction de  $x$  pour tout  $x \in ]-R, R[$ .

**Exercice 18. (QSP HEC 2015)** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite convergente à termes strictement positifs et de limite nulle. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$  et  $v_n = \frac{u_{n+1}}{S_n}$ .

- (1) Montrer que, pour tout  $k \geq 1$ , on a :  $\int_{S_k}^{S_{k+1}} \frac{dt}{t} \leq v_k$ .
- (2) Etudier la nature de la série  $\sum_{k \geq 1} v_k$  en fonction de la nature de la série  $\sum_{k \geq 1} u_k$ .
- (3) Quel résultat obtient-on dans le cas où  $u_n = \frac{1}{n}$ ?

**Exercice 19. (ESCP 2019)** On admet que  $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

- (1) Montrer que la série  $\sum_{p \geq 1} \frac{(-1)^{p+1}}{p^2}$  converge et donner sa somme.
- (2) (a) Montrer que, pour tout  $x \in [0, 1]$  et pour tout entier  $p \geq 1$ , on a :

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^p (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + (-1)^{p+1} \int_0^x \frac{t^{p+1}}{1+t} dt$$

(indication : calculer  $1+t+t^2+\dots+t^p$ ).

- (b) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé. Montrer que, pour tout entier  $p \geq 1$  et pour tout  $x \in [0, 1]$ , on a :

$$\ln(1+x^n) = \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k+1} \frac{x^{nk}}{k} + R_p(x) \quad \text{avec} \quad |R_p(x)| \leq \frac{1}{p+2}.$$

- (3) (a) Montrer que  $\int_0^1 \ln(1+x^n) dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(nk+1)}$ .
- (b) Montrer qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\left| n \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(nk+1)} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \right| \leq \frac{C}{n}.$$

- (c) En déduire un équivalent de  $I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .
- (d) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}$ . Déduire de la question précédente que :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1 - \frac{\ln(2)}{n} + \frac{\pi^2}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

**Exercice 20. (QSP HEC 2021)** Soit  $a$  un réel strictement positif.

- (1) Etudier la nature de la série  $\sum_{n \geq 0} (\arctan(n+a) - \arctan(n))$ .
- (2) Dans cette question, on suppose que  $a = \frac{1}{2}$ .
  - (a) Montrer que le reste  $R_N$  de cette série est  $\leq \frac{1}{2N}$ .
  - (b) En déduire un programme en Python permettant de donner une valeur approchée de la somme de cette série à 0,001 près (on rappelle que la commande `atan(x)` renvoie la valeur de  $\arctan(x)$ ).