TRAVAUX DIRIGÉS : INTÉGRALES IMPROPRES

Exercice 1. Etudier la nature des intégrales impropres suivantes :

(1) $\displaystyle\int_0^{e^{-1}} \frac{dx}{\ln(x)}$, (2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x-1}{x}dx$, (3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\ln(x)}{x-1}dx$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \cos\left(\frac{1}{x}\right)dx$, (5) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\ln(x)}$, (6) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2}dx$

(7) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\tan(x)}{x}dx$, (8) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-x}}{x}dx$, (9) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(x)e^{-x}dx$

(10) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(x)\ln(\tan(x))dx$, (11) $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$, (12) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)dx$

(13) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^{x^2}}dx$, (14) $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)dx$, (15) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x)}$

(16) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x-\cos(x)}$, (17) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\ln(x)dx}{(1-x^2)^{3/2}}$, (18) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$

(19) $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln(x^2+1)-\ln(x^2))dx$, (20) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1-x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)dx$, (21) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-\sqrt{x}}dx$

(22) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)dx$, (23) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt[3]{x^3+3x}\right)dx$, (24) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$

Exercice 2. Etudier la nature et, en cas de convergence, calculer la valeur des intégrales suivantes :

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x(x-1)}$, (2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos^2(x)}$, (3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$, (4) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{\ln(x)}}$,

(5) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan(x)dx$, (6) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}}dx$, (7) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}dx$, (8) $\displaystyle\int_0^{e^{-1}} \frac{dx}{x\ln(x)}$,

(9) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$, (10) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^x dx}{e^{2x}+1}$, (11) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right]dx$, (12) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 3. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. A l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales :

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{a^2}{t^2}\right)dt, \quad \int_0^{+\infty} (1-t)e^{-t}dt, \quad \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-t}dt, \quad \int_0^{+\infty} \cos(t)e^{-t}dt.$$

Exercice 4. Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variables proposé entre parenthèses :

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2t\ln(t)}{(1+t^2)^2}dt$ (poser $t=\frac{1}{u}$) , (2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x+1}$ (poser $u=e^x$),

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2dt}{3e^t-e^{-t}}$ (poser $u=e^t$) , (4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ (poser $x=\tan(u)$),

(5) $\displaystyle\int_0^2 \frac{(x^2+1)}{\sqrt{2-x}}dx$ (poser $u=2-x$) , (6) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}}$ (poser $x=\cos(u)+1$),

(7) $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-\sqrt{t}}dt$ (poser $u=\sqrt{t}$) , (8) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)dt}{\sqrt{1-t}}$ (poser $u=\sqrt{1-t}$).

Exercice 5. (Intégrale de Fresnel) On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)dt$.

(1) Montrer que les intégrales I et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}du$ sont de même nature (*indication : poser* $u = t^2$).
(2) Justifier que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}du$ converge.
(3) Etablir que, pour tout $x \geq 1$: $\int_1^x \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}du = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\int_1^x \frac{\cos(u)}{u\sqrt{u}}du$.
(4) En déduire que l'intégrale I converge.

Exercice 6. (HEC 2009) Pour tout réel $z \in \mathbb{R}$, on pose : $J(z) = \displaystyle\int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$.

(1) Montrer que l'intégrale $J(z)$ converge pour tout $z > 0$.
(2) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $J(z) \underset{z\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-z}}{z}$.

Exercice 7. (ESCP 2015) On pose $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^{x+1}}$ et $g(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t+t^{x+1}}$.

(1) Déterminer l'ensemble des réels x tels que l'intégrale $f(x)$ converge.
(2) Montrer que $f(1) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ (*indication : commencer par poser* $u = t + \frac{1}{2}$).
(3) Montrer que la fonction f est décroissante sur son domaine de définition.
(4) (a) Montrer que, pour tout $x > 0$, l'intégrale $g(x)$ converge.
  (b) A l'aide d'un changement de variable simple, montrer que : $g(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{t^x(1+t^x)}dt = \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} \frac{du}{u(1+u)}$.
  (c) Vérifier que $\frac{1}{u(1+u)} = \frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}$ pour tout $u > 0$, et en déduire la valeur de $g(x)$.
(5) (a) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a : $0 \leq f(x) \leq \frac{\ln(2)}{x}$.
  (b) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a : $0 \leq \frac{\ln(2)}{x} - f(x) \leq \frac{1}{2x+1}$.
  (c) Déterminer la limite de f en $+\infty$ ainsi qu'un équivalent simple de $f(x)$ au voisinage de 0.

Exercice 8. (ESCP 2018) Pour tout $x \in]1, +\infty[$, on pose : $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

(1) Dresser le tableau de variations complet de f et représenter son graphe.
(2) (a) Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ est convergente.
  (b) A l'aide des changements de variable $u \longmapsto \frac{1}{u}$ puis $u \longmapsto \cos(u)$ que l'on justifiera, établir que :

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \frac{\pi}{2}.$$

(3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k\sqrt{k^2-n^2}}$.
  (a) Montrer que le réel S_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  (b) Etablir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'encadrement suivant : $nS_n - \frac{1}{n}f((n+1)/n) \leq \int_{1+1/n}^{+\infty} f(t)dt \leq nS_n$ (*indication : montrer que* $f(\frac{k+1}{n}) \leq f(t) \leq f(\frac{k}{n})$ *pour tout* $t \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, *puis intégrer et sommer*).
  (c) En déduire un équivalent de S_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 9. (ESCP 2018) On pose $C(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t^2}dt$ et $S(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2}dt$.

(1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les intégrales $C(x)$ et $S(x)$ convergent.
(2) (a) Montrer que les fonctions C et S sont continues sur $\mathbb{R}$ (*indication : appliquer l'inégalité des accroissements finis aux fonctions* sin *et* cos, *puis intégrer*).
  (b) Montrer que, pour tous réels u et h, on a : $|\sin(u+h) - \sin(u) - h\cos(u)| \leq \frac{h^2}{2}$.
  (c) En déduire que S est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $S'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
(3) Déterminer pour tout réel x une relation entre $S'(x)$ et $S(x)$ (*indication : utiliser une IPP*).
(4) (a) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée de $g : x \longmapsto e^{x^2/4}f(x)$.
  (b) En déduire les solutions de l'équation différentielle $2f'(x) + xf(x) = 0$.
  (c) On suppose qu'il existe une fonction A de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $S(x) = A(x)e^{-x^2/4}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Etablir la relation suivante pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$S(x) = \frac{e^{-x^2/4}}{2}\int_0^x e^{t^2/4}dt.$$

(5) (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $S'(x) = -\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \sin(xt)(1-2t^2)e^{-t^2}dt$.
  (b) Montrer que $S'(x)$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$ que l'on déterminera, et en déduire un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

1. Exercices supplémentaires

Exercice 10. Etudier la nature des intégrales impropres suivantes :

$$(1)\ \int_0^{+\infty}\left(\frac{\arctan(x)}{x}\right)^2 dx \quad , \quad (2)\ \int_0^{+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)dx \quad , \quad (3)\ \int_1^{+\infty}\frac{\ln(x)}{x^2-1}dx \quad , \quad (4)\ \int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}.$$

Exercice 11. Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Etablir la convergence et calculer les intégrales suivantes à l'aide de l'IPP :

$$\int_0^1 \ln(1-t^2)dt, \quad \int_0^{+\infty}\ln^2(t)dt, \quad \int_0^{+\infty}\cos(at)e^{-bt}dt, \quad \int_0^{+\infty}t^3e^{-t^2}dt.$$

Exercice 12. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\lambda)}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{(1-x)dx}{(1+x)\sqrt{1+x^4}}$ en posant $t=\dfrac{1}{x}$.

Exercice 13. On considère l'intégrale $I=\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{(1-t^3)^{1/3}}$.

(1) A l'aide du changement de variable $t=\dfrac{1}{(1+x^3)^{1/3}}$ que l'on justifiera, montrer que I converge et que :

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{1+x^3}.$$

(2) A l'aide du changement de variable $x=\dfrac{1}{y}$, établir que $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dy}{1+y^3}$.

(3) A l'aide de la relation $1+y^3=(1+y)(1-y+y^2)$, en déduire que $I=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dy}{1-y+y^2}$.

(4) A l'aide du changement de variable $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}u+\dfrac{1}{2}$, en déduire que $I=\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

Exercice 14. (Transformée de Laplace) Soit $f:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^{+\infty}f(t)dt$ converge.

(1) Justifier que f admet une primitive F sur $\mathbb{R}_+$ qui s'annule en 0. Que vaut $\lim_{t\to+\infty}F(t)$?

(2) Montrer que, pour tous réels $x, y \geq 0$, on a : $\displaystyle\int_0^y e^{-xt}f(t)dt = F(y)e^{-xy}+x\int_0^y e^{-xt}F(t)dt.$

(3) En déduire que, pour tout $x\geq 0$, l'intégrale $\mathcal{L}(f)(x)=\int_0^{+\infty}e^{-xt}f(t)dt$ converge.

Exercice 15. (Critère de comparaison série-intégrale - Intégrales et séries de Bertrand) Soit $N\in\mathbb{N}$ et soit f une fonction continue, positive et décroissante de $[N,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

(1) Montrer que, pour tout $n\geq N$, on a : $f(n+1)\leq\int_n^{n+1}f(t)dt\leq f(n)$.

(2) En déduire que, pour tout $n>N$, on a : $\sum_{k=N+1}^n f(k)\leq\int_N^n f(t)dt\leq\sum_{k=N}^{n-1}f(k)$.

(3) En déduire que la série $\sum_{n\geq N}f(n)$ converge si et seulement si $\int_N^{+\infty}f(t)dt$ converge.
Ce résultat est appelé le critère de comparaison série-intégrale.

(4) Pour tous réels α,β, on définit *l'intégrale de Bertrand de paramètre* (α,β) par : $I_{\alpha,\beta}=\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha\ln^\beta(t)}$.

  (a) Etudier la nature de $I_{\alpha,\beta}$ si $\alpha>1$, puis si $\alpha<1$.

  (b) Déterminer une primitive de $x\longmapsto\frac{1}{x\ln^\beta(x)}$, et en déduire que $I_{1,\beta}$ converge si et seulement si $\beta>1$.

  (c) En déduire la nature de la série (dite *de Bertrand*) $\sum_{k\geq 2}\frac{1}{k^\alpha\ln^\beta(k)}$ en fonction de α,β.

Exercice 16. (Intégrale de Gauss - ESCP 2013) Dans cet exercice, on se propose de calculer la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt$. Pour ce faire, on pose :

$$h(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t^2x}}{1+t^2}dt.$$

(1) Montrer que l'intégrale $h(x)$ converge pour tout $x\geq 0$, puis calculer $h(0)$.

(2) (a) Montrer que, pour tout $u\geq 0$, on a : $|e^{-u}-1+u|\leq\frac{u^2}{2}$.

  (b) En revenant à la définition de la dérivée d'une fonction en un réel x, montrer que la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que, pour tout $x>0$, on a :

$$h'(x)=-\int_0^{+\infty}\frac{t^2e^{-t^2x}}{1+t^2}dt.$$

On admet dorénavant que la fonction h est continue sur $\mathbb{R}_+$.

(3) Montrer qu'il existe une constante A telle que, pour tout $x \geq 0$, on a : $h(x) - h'(x) = \frac{A}{\sqrt{x}}$.
(4) Pour tout $x \geq 0$, on pose $g(x) = e^{-x}h(x)$.
 (a) Montrer que : $g(x) = \frac{\pi}{2} - A\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$.
 (b) Déterminer la valeur de $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.
 (c) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$.

Exercice 17. (ESCP 2016) Soit a un réel ≥ 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-at}dt \quad \text{et} \quad I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}e^{-at}dt.$$

(1) (a) Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale définissant I_n converge.
 (b) Etablir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}.
 (c) En déduire l'expression de I_n en fonction de n et a.
(2) Démontrer que l'intégrale définissant I converge absolument.
(3) (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left|\sin(x) - \left(x - \frac{x^3}{6} + ... + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\right| \leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

 (b) En déduire qu'il existe un réel K_n dépendant de n tel que : $\left|I - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{I_{2k}}{(2k+1)!}\right| \leq K_n I_{2n+1}$.
 (c) En déduire que la série $\sum_{k\geq 0}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)a^{2k+1}}$ est convergente, de somme I.
(4) (a) Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [0,1]$: $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k} - \frac{1}{1+t^2} = (-1)^n\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$.
 (b) En déduire que, pour tout $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times [0,1]$: $\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \arctan(x)\right| \leq \frac{1}{2n+3}$.
 (c) En déduire une expression de I en fonction de a.

Exercice 18. (ESCP 2019) On considère l'intégrale suivante : $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)dt}{x+t}$.

(1) (a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que cette intégrale converge pour tout $x > 0$.
 (b) Montrer que cette intégrale est convergente pour $x = 0$.
(2) A l'aide d'un changement de variable affine, montrer que, pour tout $x > 0$:

$$f(x) = \cos(x)\int_x^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}du - \sin(x)\int_x^{+\infty}\frac{\cos(u)}{u}du.$$

(3) (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$.
 (b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f''(x)$ pour tout $x > 0$.
 (c) En déduire une relation entre $x, f(x), f''(x)$ pour tout $x > 0$.
(4) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 19. (HEC 2024) Soit f la fonction donnée par : $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^x(t)dt$.

(1) Question de cours : énoncer les théorèmes de comparaison pour les intégrales géneralisées.
(2) Déterminer l'ensemble de définition de f.
(3) (a) Montrer que f est positive et préciser sa monotonie.
 (b) En déduire que f admet une limite à droite et à gauche en 0.
 (c) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln(\sin(t))dt$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$0 \leq \frac{\pi}{2} - f(x) \leq -x\int_0^{\pi/2}\ln(\sin(t))dt.$$

 (d) En déduire la limite de f à droite en 0.
(4) Etablir une relation entre $f(x+2)$ et $f(x)$ pour tout $x > -1$.
(5) Pour tout $x > 0$, on pose $\varphi(x) = xf(x)f(x-1)$. Montrer que, pour tout $x > 0$, on a $\varphi(x+1) = \varphi(x)$.
(6) En déduire la valeur de $\varphi(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
(7) Déterminer un équivalent de f au voisinage de -1^+.