

TRAVAUX DIRIGÉS : INTÉGRALES IMPROPRES (RÉPONSES - INDICATIONS)

Exercice 1.

- (1) cv , (2) cv , (3) cv
 (4) cv , (5) div , (6) cv
 (7) div , (8) div , (9) cv
 (10) cv , (11) div , (12) cv
 (13) cv , (14) cv , (15) div
 (16) div , (17) cv , (18) cv
 (19) cv , (20) cv , (21) div
 (22) div , (23) cv , (24) cv

Exercice 2.

- (1) div , (2) div , (3) $\ln(2)$, (4) $2\sqrt{\ln(2)}$,
 (5) div , (6) 0 , (7) 1 , (8) div,
 (9) 2 , (10) $\pi/4$, (11) 2 , (12) 0.

Exercice 3.

(1) $a\pi$, (2) 0 , (3) $\frac{1}{2}$, (4) $\frac{1}{2}$.

Exercice 4.

- (1) 0 , (2) $\ln(2)$,
 (3) $\frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)$, (4) $\frac{\pi}{2}$,
 (5) $\frac{94\sqrt{2}}{15}$, (6) π ,
 (7) 12 , (8) -2 .

Exercice 5.

- (1) Effectuer le changement de variable $u = t^2$.
- (2) Appliquer le critère d'équivalence en 0.
- (3) Procéder par IPP.
- (4) Conclure avec les questions précédentes.

Exercice 6.

- (1) Appliquer le critère de comparaison avec une intégrale exponentielle.
- (2) A l'aide d'une intégration par parties, on trouve que : $J(z) = \frac{e^{-z}}{z} - \int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt$. Ensuite, on montre par des encadrements d'intégrales que $\int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt \underset{z \rightarrow +\infty}{\sim} o\left(\frac{e^{-z}}{z}\right)$, et on conclut.

Exercice 7.

- (1) $\mathcal{D}_f =]0, +\infty[$.
- (2) Effectuer le changement de variable $u = t + \frac{1}{2}$. On trouve que : $f(1) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

- (3) Si $x \leq y$, on voit que $\frac{1}{1+t+t^{x+1}} \geq \frac{1}{1+t+t^{y+1}}$ pour tout $t \geq 1$. Conclure avec la croissance de l'intégrale.
- (4) (a) Utiliser le critère d'équivalence avec une intégrale de Riemann.
 (b) Effectuer le calcul!
 (c) On trouve que : $g(x) = \frac{\ln(2)}{x}$.
- (5) (a) Si $x > 0$, on voit que $0 \leq \frac{1}{1+t+t^{x+1}} \leq \frac{1}{t+t^{x+1}}$ pour tout $t \geq 1$. Conclure avec la croissance de l'intégrale.
 (b) Idem qu'à la question précédente en utilisant le fait que $g(x) = \frac{\ln(2)}{x}$.
 (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(2)}{x}$.

Exercice 8.

- (1) On vérifie que f est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$, qu'elle tend vers $+\infty$ en 1 et vers 0 en $+\infty$.
- (2) (a) Pour l'impropriété en $+\infty$, montrer que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$. Pour l'impropriété en 1, montrer que $f(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x-1}}$. Conclure.
 (b) En posant $x = \frac{1}{u}$, puis $t = \cos(u)$, on trouve que :
- $$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}.$$
- (3) (a) Pour n fixé, S_n est la somme d'une série convergente car : $\frac{1}{k\sqrt{k^2-n^2}} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}$.
 (b) Suivre les indications données!
 (c) On trouve que : $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$.

Exercice 9.

- (1) Utiliser le critère de comparaison par rapport à $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$. Etablir ainsi la convergence absolue, puis la convergence $C(x)$ et $S(x)$.
- (2) (a) Montrer que $|C(x) - C(x_0)|$ tend vers 0 quand x tend vers x_0 . Pour cela, on utilise les accroissements finis pour montrer que $|\cos(xt) - \cos(x_0t)| \leq |x - x_0|t$ pour tout $t \geq 0$. On multiplie le tout par e^{-t^2} et on intègre pour aboutir à :

$$|C(x) - C(x_0)| \leq |x - x_0| \int_0^{+\infty} te^{-t^2} dt.$$

On conclut alors par encadrement. Idem pour S .

- (b) Utiliser la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1.

- (c) Montrer que $\left| \frac{S(x) - S(x_0)}{x - x_0} - \int_0^{+\infty} t \cos(x_0t) e^{-t^2} dt \right|$ tend vers 0 quand x tend vers x_0 , en procédant comme à la question (2)(a) et en utilisant la question (2)(b). On trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$S'(x) = \int_0^{+\infty} t \cos(xt) e^{-t^2} dt.$$

- (3) Faire une IPP pour trouver que : $S'(x) = \frac{1}{2} - \frac{xS(x)}{2}$.
- (4) (a) $g'(x) = f'(x)e^{x^2/4} + f(x)\frac{x}{2}e^{x^2/4}$.
 (b) $2f'(x) + xf(x) = 0$ ssi $g'(x) = 0$ ssi g est constante. Au final, on trouve que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation différentielle $2f'(x) + xf(x) = 0$ est donné par :

$$\mathcal{S} = \left\{ f : x \mapsto \lambda e^{-x^2/4}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

- (c) Calculer $S'(x)$ et reporter le résultat dans la relation de la question (3). On trouve que $A'(x) = \frac{1}{2}e^{x^2/4}$, et donc il existe une constante C telle que :

$$A(x) = C + \int_0^x e^{t^2/4} dt.$$

Comme $S(0) = 0$, il s'ensuit que $A(0) = 0$ et $C = 0$, d'où le résultat.

- (5) (a) Procéder par IPP à partir de la question (2)(c).

- (b) Montrer que $|S'(x)| \leq \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} (1+2t^2)e^{-t^2} dt$. En déduire par encadrement que $\lim_{x \rightarrow +\infty} S'(x) = 0$.
 Comme $S'(x) = \frac{1}{2} - \frac{xS(x)}{2}$ d'après la question (3), il s'ensuit que $S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

1. EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

Exercice 10.

- (1) cv , (2) div , (3) cv , (4) cv.

Exercice 11.

- (1) $2\ln(2) - 2$, (2) 2 , (3) $\frac{b}{a^2 + b^2}$, (4) $\frac{1}{2}$.

Exercice 12.

- (1) Le changement de variable proposé nous donne que :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\lambda)} = \int_0^{+\infty} \frac{t^\lambda dt}{(1+t^2)(1+t^\lambda)}.$$

Dès lors, ceci entraîne que :

$$2I = I + I = \int_0^{+\infty} \frac{(1+x^\lambda)dx}{(1+x^2)(1+x^\lambda)} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

On en déduit que : $I = \frac{\pi}{4}$.

- (2) Soit J la deuxième intégrale. Le changement de variable proposé nous donne que $J = -J$, et donc $J = 0$.

Exercice 13. On considère l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{dt}{(1-t^3)^{1/3}}$.

- (1) La fonction $x \mapsto \frac{1}{(1+x^3)^{1/3}}$ est $\mathcal{C}^1$ strictement décroissante, donc le changement de variable est licite.

On trouve le résultat après calculs, et on justifie la convergence à l'aide du critère d'équivalence.

- (2) Procéder comme à la question (1).

- (3) Partant du fait que $I = \int_0^{+\infty} \frac{xdx}{1+x^3} = \int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^3}$, on trouve que :

$$2I = I + I = \int_0^{+\infty} \frac{(x+1)dx}{1+x^3} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1-x+x^2}.$$

Il n'y a plus qu'à conclure.

- (4) Effectuer les calculs!

Exercice 14.

- (1) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$, et donc elle admet une primitive F sur $\mathbb{R}_+$ qui s'annule en 0 (cf. cours de première année). De plus, on trouve que : $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = \int_0^{+\infty} f(t)dt$.

- (2) Procéder par IPP!

- (3) Si $x = 0$, alors le résultat est clair d'après l'énoncé. Si $x > 0$, alors $F(y)e^{-xy}$ tend vers 0 quand y tend vers $+\infty$ car F admet une limite finie en $+\infty$ d'après (1) et e^{-xy} tend vers 0 quand y tend vers $+\infty$. De plus, comme la fonction F est bornée, l'intégrale $\int_0^{+\infty} F(t)e^{-xt}dt$ converge absolument par comparaison avec une intégrale exponentielle, et donc elle converge. Par passage à la limite quand y tend vers $+\infty$ dans la question (2), on en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt}f(t)dt$ converge.

Exercice 15.

- (1) On part du fait que $f(n+1) \leq f(t) \leq f(n)$ pour tout $t \in [n, n+1]$, et on conclut par croissance de l'intégrale.
 (2) Sommer la relation obtenue à la question (1).
 (3) Utiliser le résultat de la question (2).
 (4) Pour tous réels α, β , on définit l'intégrale de Bertrand de paramètre (α, β) par :

$$I_{\alpha, \beta} = \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha \ln^\beta(t)}.$$

- (a) Appliquer le critère de négligeabilité avec une intégrale de Riemann. Au final, $I_{\alpha,\beta}$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha < 1$.
- (b) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x \ln^\beta(x)}$ admet pour primitive la fonction $F : x \mapsto \frac{\ln^{1-\beta}(x)}{1-\beta}$. Conclure que $I_{1,\beta}$ converge si et seulement si $\beta > 1$.
- (c) A l'aide de la question (3), conclure que la série de Bertrand converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Exercice 16.

- (1) Utiliser le critère de comparaison avec une intégrale de Riemann. On trouve que $h(0) = \frac{\pi}{2}$.
- (2) (a) Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1.
- (b) En utilisant la question précédente, montrer que $\left| \frac{h(x+\varepsilon) - h(x)}{\varepsilon} + \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t^2 x}}{1+t^2} dt \right|$ tend vers 0 quand ε tend vers 0, en procédant par des majorations sur les intégrales comme à l'exercice 9.
- (3) Après calculs, on trouve que $h(x) - h'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2 x} dt$. On effectue alors le changement de variable affine $u = \sqrt{x}t$ et on conclut en posant $A = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.
- (4) (a) Dériver la fonction $t \mapsto -h(t)e^{-t}$, puis utiliser la question précédente et réintégrer le tout.
- (b) Par croissance de l'intégrale, on trouve que, pour tout $x \geq 0$:

$$|h(x)| \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

En particulier, la fonction h est bornée sur $\mathbb{R}_+$. Comme e^{-x} tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

- (c) D'après les questions précédentes, on trouve que :

$$\frac{\pi}{2} - A \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 0 \quad \text{et donc :} \quad \frac{\pi}{2} = A \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt.$$

A l'aide du changement de variable $t = u^2$, on trouve que $\frac{\pi}{2} = 2A^2$, et donc $A = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 17.

- (1) (a) Utiliser le critère de négligeabilité par rapport à une intégrale de Riemann.
- (b) Montrer par IPP que $I_n = \frac{n}{a} I_{n-1}$.
- (c) On trouve par récurrence et avec la question précédente que $I_n = \frac{n!}{a^{n+1}}$.
- (2) L'intégrale I est faussement impropre en 0, et donc $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} e^{-at} dt$ converge absolument. De plus, on a pour tout $t \geq 1$:

$$\left| \frac{\sin(t)}{t} e^{-at} \right| \leq e^{-at}.$$

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-at} dt$ converge absolument par comparaison avec une intégrale exponentielle. On conclut avec la relation de Chasles.

- (3) (a) Utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.
- (b) Diviser l'inégalité de la question précédente par x , la multiplier par e^{-ax} , puis intégrer le tout et conclure par croissance de l'intégrale et d'après l'inégalité triangulaire.
- (c) Montrer que $K_n I_{2n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et conclure en remplaçant I_{2k} par son expression trouvée à la question (1)(c).
- (4) (a) Utiliser les sommes de suites géométriques.
- (b) Intégrer la relation de la question (4)(a), puis majorer $\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$ par $\int_0^x t^{2n+2} dt \leq \frac{1}{2n+3}$.
- (c) Par encadrement, on trouve que :

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}.$$

D'après la question (3)(c), on sait que :

$$I = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{1}{a}\right)^{2k+1}}{2k+1}.$$

On en déduit que : $I = \arctan\left(\frac{1}{a}\right)$.

Exercice 18.

- (1) (a) Pour tout $a > 1$, on trouve par IPP que :

$$\int_0^a \frac{\sin(t)dt}{x+t} = -\frac{\cos(a)}{a+x} + \frac{1}{x} - \int_0^a \frac{\cos(t)dt}{(x+t)^2}.$$

On conclut alors comme dans l'exercice 5.

- (b) Procéder comme dans l'exercice 5.

- (2) En posant $u = x + t$, on trouve que :

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u-x)}{u} du.$$

On conclut alors avec les formules d'addition pour sin et la linéarité de l'intégrale.

$$f(x) = \cos(x) \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du - \sin(x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du.$$

- (3) (a) Posons $F(x) = \int_1^x \frac{\sin(u)}{u} du$, $G(x) = \int_1^x \frac{\cos(u)}{u} du$ et :

$$F_0 = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du \quad \text{et} \quad G(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du.$$

D'après la relation de Chasles, on trouve que, pour tout $x > 0$:

$$f(x) = \cos(x)(F(x) - F_0) + \sin(x)(G(x) - G_0).$$

F et G sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme primitives de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme et produits de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par dérivation, on a pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = -\cos(x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du - \sin(x) \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du.$$

- (b) Les fonctions F et G sont $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme primitives de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme et produits de fonctions $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par dérivation, on a pour tout $x > 0$:

$$f''(x) = \frac{1}{x} + \sin(x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du - \cos(x) \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du.$$

- (c) La relation à trouver est : $\forall x > 0, f''(x) = \frac{1}{x} - f(x)$.

- (4) Les intégrales $\int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du$ et $\int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$ tendent vers 0 quand x tend vers $+\infty$ en tant que restes d'intégrales convergentes. Comme cos et sin sont bornées sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 19.

- (1) Cf cours!
- (2) Par équivalence, on trouve que $\mathcal{D}_f =]-1, +\infty[$.
- (3) (a) Utiliser la positivité et la croissance de l'intégrale. On trouve que f est décroissante sur $]-1, +\infty[$.
 (b) Utiliser le théorème de la limite monotone pour les fonctions.
 (c) Etablir la convergence de l'intégrale à l'aide du critère d'équivalence. Pour l'encadrement à démontrer, utiliser l'inégalité de convexité pour l'exponentielle et la croissance de l'intégrale.
 (d) On trouve que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$.
- (4) Par IPP, on trouve que $(x+2)f(x+2) = (x+1)f(x)$ pour tout $x > -1$.
- (5) A vérifier avec la question précédente!
- (6) On trouve que $\varphi(n) = \frac{\pi}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- (7) A l'aide de la question (5), on obtient que : $f(x) \underset{x \rightarrow -1^+}{\sim} \frac{1}{x+1}$.