

Devoir Maison de Mathématiques n°1 : suites et séries

Exercice 1. On considère la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt$.

- (1) Calculer les valeurs de I_0, I_1, I_2 .
- (2) (a) Etudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n \geq 0}$, et en déduire que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ converge.
(b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2})$.
(c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

- (3) (a) Rappeler un équivalent simple de $\cos(x) - 1$ et $\ln(1+x)$ au voisinage de 0.
(b) Montrer que : $n \ln \left(\cos \left(n^{-1/4} \right) \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2} \sqrt{n}$. En déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\cos \left(n^{-1/4} \right) \right)^n$.
(c) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\cos \left(n^{-2/3} \right) \right)^n = 1$.

- (4) (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\int_0^{n^{-1/4}} \cos^n(t) dt \leq n^{-1/4}$.
(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\int_{n^{-1/4}}^{\pi/2} \cos^n(t) dt \leq \frac{\pi}{2} \left(\cos \left(n^{-1/4} \right) \right)^n$.
(c) En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

- (5) (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $I_n \geq \int_0^{n^{-2/3}} \cos^n(t) dt \geq n^{-2/3} \left(\cos \left(n^{-2/3} \right) \right)^n$.
(b) En déduire la nature de la série de terme général I_n .

- (6) On rappelle que : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.

- (a) Montrer que, pour tout $t \in]-\pi, \pi[$, on a : $\cos(t) + 1 = \frac{2}{1 + \tan^2(t/2)}$.

- (b) A l'aide du changement de variable $u = \tan(t/2)$, montrer que : $\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + \cos(t)} = 1$.

- (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k I_k = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + \cos(t)} - \int_0^{\pi/2} \frac{(-\cos(t))^{n+1}}{1 + \cos(t)} dt.$$

- (d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| \int_0^{\pi/2} \frac{(-\cos(t))^{n+1}}{1 + \cos(t)} dt \right| \leq I_{n+1}.$$

- (e) En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n I_n$ converge et déterminer sa somme.

Exercice 2. Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \geq 0$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}.$$

- (1) Montrer que, pour tout $x \geq 0$, la série de terme général $f_n(x)$ converge. On note $F(x)$ sa somme.
- (2) Calculer les valeurs de $F(0)$ et de $F(1)$.
- (3) Montrer que, pour tout $x \geq 0$, la série de terme général $f'_n(x)$ converge. On note $G(x)$ sa somme.
- (4) Dans cette question, on se propose d'étudier la dérivabilité de F . Pour ce faire, on considère la fonction φ définie pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(t) = \frac{1}{t}$.
(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que :

$$\forall (x, x_0) \in [n, +\infty[^2, \quad |\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x - x_0)\varphi'(x_0)| \leq \frac{(x - x_0)^2}{n^3}.$$

- (b) Soient x, h des réels tels que $x \geq 0, h \neq 0$ et $x+h \geq 0$. Déduire de la question précédente la nature de la série de terme général $|f_n(x+h) - f_n(x) - hf'_n(x)|$.
- (c) Montrer qu'il existe un réel K tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x+h \geq 0$, on a :

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x) \right| \leq K|h|.$$

- (d) En déduire que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que $F' = G$.
- (5) Dans cette question, on se propose de calculer un équivalent de F en $+\infty$.
- (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$f_{k+1}(x) \leq \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt \leq f_k(x).$$

- (b) En déduire que, pour tout réel $x \geq 0$ et tout entier $n \geq 2$, on a :

$$\int_1^{n+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt \leq \sum_{k=1}^n f_k(x) \leq \frac{x}{x+1} + \int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt.$$

- (c) En déduire que, pour tout réel $x \geq 0$, on a :

$$\ln(1+x) \leq F(x) \leq \frac{x}{x+1} + \ln(1+x).$$

- (d) Déterminer un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Problème 1.

- (1) Question préliminaire : Soit f une fonction définie et strictement positive sur $\mathbb{R}$, telle que $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} x$.
Montrer que $\ln(f(x)) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \ln(x)$.

Partie 1 : deux nouvelles fonctions

On définit les fonctions, appelées "sinus hyperbolique" et "cosinus hyperbolique", notées respectivement sh et ch en posant pour tout réel x :

$$\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- (1) (a) Etudier la parité de la fonction sh.
(b) Dresser le tableau de variations de la fonction sh (avec les limites aux bornes).
(c) Déterminer un équivalent en 0 de sh(x).
(2) (a) Etudier la parité de la fonction ch.
(b) Dresser le tableau de variations de la fonction ch (avec les limites aux bornes).
(3) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$.

Partie 2 : une troisième fonction

- (1) (a) Montrer que l'on définit bien une fonction, appelée "tangente hyperbolique" et notée th, en posant pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}.$$

- (b) Vérifier que la fonction th est impaire.
(c) En s'aidant éventuellement des relations $\text{ch}' = \text{sh}$ et $\text{sh}' = \text{ch}$, déterminer les variations de la fonction th.
(d) Dresser le tableau de variations de la fonction th (avec les limites aux bornes).
(2) (a) Trouver des constantes a, b telles que : $\forall x > 0, \frac{1}{\text{sh}(x)} = \frac{ae^{-x}}{1 - e^{-x}} + \frac{be^{-x}}{1 + e^{-x}}$.
(b) En déduire, à l'aide de la fonction th, une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\text{sh}(x)}$.
(3) Montrer que $\ln\left(\text{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \ln(x)$.

Partie 3 : une série convergente

Dans cette partie, on désigne par x un réel strictement positif.

- (1) (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\frac{1}{\text{sh}((k+1)x)} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{\text{sh}(tx)} dt \leq \frac{1}{\text{sh}(kx)}.$$

(b) En déduire l'encadrement suivant, valable pour tout entier $n \geq 2$:

$$\int_1^n \frac{1}{\operatorname{sh}(tx)} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\operatorname{sh}(kx)} \leq \int_1^n \frac{1}{\operatorname{sh}(tx)} dt + \frac{1}{\operatorname{sh}(x)}.$$

(2) (a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\operatorname{sh}(nx)}$ est convergente.

(b) Etablir, pour tout $x > 0$, l'encadrement suivant :

$$-\frac{1}{x} \ln \left(\operatorname{th} \left(\frac{x}{2} \right) \right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(kx)} \leq -\frac{1}{x} \ln \left(\operatorname{th} \left(\frac{x}{2} \right) \right) + \frac{1}{\operatorname{sh}(x)}.$$

(c) En déduire, à l'aide des questions précédentes, que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(kx)} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\frac{\ln(x)}{x}.$$