

TRAVAUX DIRIGÉS : ESPACES VECTORIELS

1. SYSTÈMES LINÉAIRES

Exercice 1. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 2x - 2y + z = 3 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x + y + 2z - 5t = 1 \\ x - 2y + t = 0 \\ 2x - z - t = 2 \end{cases}.$$

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} x + 2y - z = 6 \\ 2x + y + 3z = 11 \\ -x - 5y + 6z = -7 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x + 2y - z = -5 \\ 2x + y + 3z = 3 \\ -x - 5y + 6z = 5 \end{cases}$$

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} x + y + t = 1 \\ x + 2y + z + 3t = 1 \\ 3x + 2y - z + t = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - y + z + t = 2 \\ y - z + 2t = 3 \end{cases}.$$

2. ESPACES VECTORIELS

Exercice 4. Déterminer si la famille $\mathcal{F}$ est libre et/ou génératrice dans $\mathbb{R}^3$, et ce dans chacun des cas suivants :

- (1) $\mathcal{F} = ((1, -1, -1), (-1, 1, -1), (-1, -1, 1))$, (2) $\mathcal{F} = ((1, -1, -1), (1, 1, 1), (3, 1, 1))$,
(3) $\mathcal{F} = ((1, -1, -1), (2, -1, 1))$, (4) $\mathcal{F} = ((7, 6, 9), (1, 4, 6), (3, 6, 2))$.

Exercice 5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = 1$, $v_n = 2^n$, $w_n = 3^n$. Montrer que les suites $(u_n), (v_n), (w_n)$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 6. Soit $a_1, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts. Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_k(x) = e^{a_k x}$. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.

Exercice 7. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_k(x) = \cos(kx)$. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(f_0, \dots, f_n)$ est libre (*indication : penser à dériver*).

Exercice 8. Déterminer une base de l'espace vectoriel E dans chacun des cas suivants :

- (1) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$,
(2) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 5y - 3z = -x - 4y + 2z = 0\}$,
(3) $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + 2z = x + y - 4z = y - z + t = 0\}$,
(4) $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - 2z = x - 4y + 2t = 0\}$.

Exercice 9. Calculer le rang de la famille de vecteurs $\mathcal{F}$ dans chacun des cas suivants :

- (1) $\mathcal{F} = ((1, 3, -3), (4, 2, -3), (-1, 7, 6))$,
(2) $\mathcal{F} = ((4, -5, 3), (2, 3, -2), (4, -16, 10), (8, 1, -1))$,
(3) $\mathcal{F} = (x \mapsto x^2, x \mapsto (x+1)^2, x \mapsto (x+2)^2)$,
(4) $\mathcal{F} = (x \mapsto x^3 - 1, x \mapsto 2x^3 - x^2 - x, x \mapsto x^3 - 7x^2 + 5x + 1, x \mapsto x^2 - 3x + 2)$.

Exercice 10. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u_1 = (-3, 1, 0)$, $u_2 = (-5, 2, 1)$, $u_3 = (1, -1, 1)$, $u_4 = (1, 0, 1)$.

- (1) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
(2) Calculer le vecteur colonne des coordonnées de u_4 dans la base $\mathcal{B}$.
(3) La famille (u_1, u_2, u_4) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$? Justifier.

Exercice 11. Soit n un entier ≥ 3 . Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, on considère les sous-ensembles :

$$F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(t, \dots, t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

- (1) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.
- (2) Déterminer des bases de F et G , et en déduire leurs dimensions.
- (3) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 12. Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

- (1) Montrer que (A, B, C, D) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- (2) Calculer les coordonnées de E dans cette base.
- (3) Calculer le rang de la famille (A, B, C, F) . Est-ce une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercice 13. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles, on considère l'ensemble suivant :

$$E = \{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0\}.$$

- (1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- (2) Donner l'expression générale des éléments de E .
- (3) En déduire une base et la dimension de E .

Exercice 14. Soit n un entier ≥ 3 , soit $E = \mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré $\leq n$ et considérons les ensembles définis par :

$$F_0 = \{P \in E \mid P(0) = 0\}, \quad F_1 = \{P \in E \mid P(1) = 0\}, \quad F = \{P \in E \mid P(0) = P(1) = 0\}.$$

- (1) Montrer que F_0, F_1, F sont des sous-espaces vectoriels de E .
- (2) Montrer que $(x \mapsto x, x \mapsto x^2, \dots, x \mapsto x^n)$ et $(x \mapsto x-1, x \mapsto x(x-1), \dots, x \mapsto x^{n-1}(x-1))$ sont des bases de F_0 et de F_1 .
- (3) Déterminer une base de F , puis montrer que $E = F_0 + F_1$. Cette somme est-elle directe?

Exercice 15. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $E_n = \{P \in \mathbb{R}_n[x] \mid \int_0^1 P(t) dt = 0\}$.

- (1) Montrer que E_n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[x]$.
- (2) Déterminer une base et la dimension de E_n .

Exercice 16. (ESCP 2004) Soit $E = \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère l'ensemble F des éléments Φ de E tels que $\forall x \in \mathbb{R}, \Phi''(x) = (1+x^2)\Phi(x)$. Par ailleurs, on désigne par f et g les fonctions définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \quad \text{et} \quad g(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

- (1) Montrer que F est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
- (2) Montrer que, si $v, w \in F$, alors la fonction $v'w - vw'$ est constante sur $\mathbb{R}$.
- (3) Montrer que les fonctions f et g appartiennent à F , et que la famille (f, g) est libre.
- (4) Soit $h \in F$. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $h = \alpha f + \beta g$ (indication : calculer $(\frac{h}{f})'$).
- (5) En déduire la dimension de l'espace vectoriel F .

Exercice 17. (Polynômes interpolateurs de Lagrange - ESCP 2008) Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $a_0, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts. Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, on pose :

$$L_k : x \mapsto \prod_{j=0, j \neq k}^n \left(\frac{x - a_j}{a_k - a_j} \right).$$

- (1) Montrer que, pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, on a $L_k(a_i) = 0$ si $k \neq i$ et $L_k(a_i) = 1$ si $k = i$.
- (2) Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
- (3) Déterminer les coordonnées de $P \in \mathbb{R}_n[x]$ dans la base $(L_0, \dots, L_n)$.
- (4) Montrer que $\sum_{k=0}^n L_k = 1$, puis déterminer le polynôme $Q = \sum_{k=0}^n a_k L_k$.

Exercice 18. (QSP HEC 2013) Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[x]$, on considère les sous-espaces vectoriels $F = \{P \in E \mid P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$, $G = \{P \in E \mid P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$, $H = \{P \in E \mid P(x) = P(-x)\}$. Montrer que $E = F \oplus G \oplus H$.

3. EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

Exercice 19. Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} 3x + 4y + z + 2t = 3 \\ 6x + 8y + 2z + 6t = 7 \\ 9x + 12y + 3z + 10t = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x + y + 2z - t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ x + y + 3z - 3t = 0 \end{cases}.$$

Exercice 20. Résoudre en fonction de $a \in \mathbb{R}$ les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} x + y + az = -1 \\ x + ay + z = -1 \\ ax + y + z = 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 4z = 1 \\ x + ay + a^2z = 1 \end{cases}.$$

Exercice 21. Déterminer en fonction de $m \in \mathbb{R}$ le rang de la famille $\mathcal{F} = ((m, -1, m), (3, m, 1), (1, -2, 1))$.

Exercice 22. Déterminer l'ensemble des réels m tels que les vecteurs $u_1 = (m, 1, 2m - 1)$, $u_2 = (1, 1 - m, 0)$, $u_3 = (1, -1, 2 - m)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 23. Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + 3z + 4t = 0\}$ et $K = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$, où :

$$u_1 = (2, 1, 0, 2), \quad u_2 = (-1, -2, 3, 1), \quad u_3 = (1, 1, 1, 1), \quad u_4 = (0, 0, 3, 1), \quad u_5 = (1, 0, 0, 1).$$

- (1) (a) Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est libre.
- (b) Calculer le rang de (u_1, u_2, u_3, u_4) . Cette famille est-elle une base de $\mathbb{R}^4$?
- (c) Montrer que la famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3, u_5)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
- (d) Calculer le vecteur colonne des coordonnées de u_4 dans la base $\mathcal{F}$.
- (2) (a) Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
- (b) Déterminer une base de H , et en déduire sa dimension.
- (c) Déterminer l'ensemble $H \cap \text{Vect}(u_3)$. A-t-on $H + \text{Vect}(u_3) = \mathbb{R}^4$? Justifier.
- (d) Calculer une base et la dimension de $H \cap K$.
- (e) En déduire que $H + K = \mathbb{R}^4$. Cette somme est-elle directe?

Exercice 24. A l'aide de la formule de Taylor, déterminer les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[x]$ dans la base $\mathcal{B} = (x \mapsto 1, x \mapsto (x - a), x \mapsto (x - a)^2, \dots, x \mapsto (x - a)^n)$.

Exercice 25. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq b$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $P_k : x \mapsto (x - a)^k (x - b)^{n-k}$. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ des réels non tous nuls et posons $P = \sum_{k=0}^n \lambda_k P_k$.

- (1) Montrer que l'ordre de multiplicité de la racine a de P est le plus petit entier k tel que $\lambda_k \neq 0$.
- (2) En déduire que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est libre, puis que c'est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

Exercice 26. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (-1)^n$, $v_n = n$, $w_n = 3^n$. Montrer que les suites $(u_n), (v_n), (w_n)$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 27. Soit $E = \mathcal{F}(]-1, 1[, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $] -1, 1[$ dans $\mathbb{R}$. On considère le sous-espace vectoriel F de E engendré par les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 définies pour tout $x \in] -1, 1[$ par :

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad f_2(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad f_4(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Déterminer une base de F ainsi que la dimension de F .

Exercice 28. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On désigne par F l'ensemble des fonctions constantes sur $[0, 1]$ et par G celui des fonctions continues sur $[0, 1]$ telles que $\int_0^1 f(t) dt = 0$.

- (1) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .
- (2) Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .

Exercice 29. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles, on désigne par E l'ensemble des suites réelles convergentes, par E_0 l'ensemble des suites réelles convergentes de limite nulle et par C l'ensemble des suites réelles constantes. Montrer que E, E_0, C sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, puis que : $E = E_0 \oplus C$.

Exercice 30. (Equations différentielles linéaires à coefficients constants) Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on désigne par E_λ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que $f' = \lambda f$, et par F l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que : $f'' - 5f' + 6f = 0$.

- (1) (a) Justifier que E_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
 (b) Montrer que, pour tout $f \in E_\lambda$, la fonction $g : x \mapsto f(x)e^{-\lambda x}$ est constante sur $\mathbb{R}$.
 (c) En déduire une base et la dimension de E_λ .
- (2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_1(x) = e^{2x}$ et $f_2(x) = e^{3x}$.
 (a) Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
 (b) Montrer que les fonctions f_1 et f_2 forment une famille libre de F .
 (c) Soit $g \in F$. Montrer que la fonction $h : x \mapsto g(x)e^{-2x}$ vérifie l'équation $h'' = h'$.
 (d) En déduire que, pour tout $g \in F$, il existe des réels α_1, α_2 tels que $g = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$.
 (e) En déduire une base et la dimension de F .

Exercice 31. (ESCP 2014) Soit n un entier ≥ 2 . On désigne par $(E_{k,l})_{1 \leq k, l \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout réel K , on définit les ensembles :

$$\begin{aligned} \bullet L_K &= \left\{ M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n m_{i,j} = K \right\}. \\ \bullet C_K &= \left\{ M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{i=1}^n m_{i,j} = K \right\}. \\ \bullet L &= \bigcup_{K \in \mathbb{R}} L_K \text{ et } C = \bigcup_{K \in \mathbb{R}} C_K. \end{aligned}$$

- (1) (a) Montrer que L_0 est un espace vectoriel.
 (b) Montrer que L_0 est engendré par la famille de matrices $(E_{i,j} - E_{i,n})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n-1}$.
 (c) Déterminer la dimension de L_0 .
- (2) (a) Soit $K \in \mathbb{R}$ et soit I_n la matrice identité de taille n . Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, M appartient à L_K si et seulement si $M - KI_n$ appartient à L_0 .
 (b) Montrer que $L = \text{Vect}(I_n) \oplus L_0$, et en déduire la dimension de L .
- (3) (a) Soit $M = (m_{i,j}) \in L_0$. Montrer que : $M \in C_0 \iff \forall j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \sum_{i=1}^n m_{i,j} = 0$.
 (b) En déduire une base et la dimension de $L_0 \cap C_0$ (*indication : on pourra montrer que la famille $(E_{i,j} - E_{i,n} - E_{n,j} + E_{n,n})_{1 \leq i, j \leq n-1}$ est une base de $L_0 \cap C_0$*).
- (4) (a) Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, M appartient à $L \cap C$ si et seulement s'il existe un réel K tel que M appartienne à $L_K \cap C_K$.
 (b) Déterminer la dimension de $L \cap C$ (*indication : montrer que $L \cap C = \text{Vect}(I_n) \oplus (L_0 \cap C_0)$*).

Exercice 32. (ESCP 2016) On pose $S_0 : x \mapsto 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note S_k le polynôme défini par :

$$S_k : x \mapsto \prod_{i=0}^{k-1} (x - i).$$

- (1) (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(S_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille libre de $\mathbb{R}[x]$.
 (b) Soit $m \in \mathbb{N}$. Prouver que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_m[x]$, il existe un unique $(m+1)$ -uplet de réels $(a_0, \dots, a_m)$ tel que $P = \sum_{k=0}^m a_k S_k$.
- (2) (a) Calculer $S_k(n)$ pour tous entiers naturels n, k .
 (b) Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_m[x]$ écrit dans la base $(S_k)_{0 \leq k \leq n}$ sous la forme :

$$P = \sum_{k=0}^m a_k S_k.$$

- (i) Démontrer que, pour tout entier $N \geq n$, on a :

$$\sum_{n=0}^N \frac{P(n)}{n!} = \sum_{k=0}^m \sum_{n=k}^N \frac{1}{(n-k)!}.$$

- (ii) En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{P(n)}{n!}$ converge et calculer sa somme en fonction des a_k .

- (c) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2(n-1)(n-2)\dots(n-p)}{n!}$ et calculer sa somme.

Exercice 33. (QSP HEC 2019) Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $f \in E$ une fonction non constante et soit n un entier ≥ 2 . Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on considère l'élément f^k de E défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f^k(x) = (f(x))^k$. Étudier la liberté de la famille $(f^1, f^2, \dots, f^n)$.