

TRAVAUX DIRIGÉS : ESPACES VECTORIELS (RÉPONSES - INDICATIONS)

1. SYSTÈMES LINÉAIRES

Exercice 1.

- (1) $\mathcal{S} = \left\{ \left(-\frac{9}{5}, -\frac{17}{5}, -\frac{1}{5} \right) \right\}$.
(2) $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{10}{11} + \frac{13}{11}t, \frac{5}{11} + \frac{12}{11}t, -\frac{2}{11} + \frac{15}{11}t, t \right), t \in \mathbb{R} \right\}$.

Exercice 2.

- (1) $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{16}{3} - \frac{7}{3}z, \frac{1}{3} + \frac{5}{3}z, z \right), z \in \mathbb{R} \right\}$.
(2) $\mathcal{S} = \emptyset$.

Exercice 3.

- (1) $\mathcal{S} = \emptyset$.
(2) $\mathcal{S} = \{(5 - 3t, -7 + 5t, -10 + 7t, t), t \in \mathbb{R}\}$.

2. ESPACES VECTORIELS

Exercice 4.

- (1) libre et génératrice dans $\mathbb{R}^3$, (2) ni libre, ni génératrice dans $\mathbb{R}^3$,
(3) libre et pas génératrice dans $\mathbb{R}^3$, (4) libre et génératrice dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5. Résoudre le système $\lambda u_n + \mu v_n + \delta w_n = 0$ obtenu pour $n = 0, 1, 2$.

Exercice 6. Procéder par récurrence en utilisant la dérivation une fois.

Exercice 7. Idem qu'avant en dérivant cette fois-ci deux fois.

Exercice 8.

- (1) $\mathcal{B} = ((1, 0, 1), (0, 1, 1))$.
(2) $\mathcal{B} = ((-2, 1, 1))$.
(3) $\mathcal{B} = ((1, 3, 1, -2))$.
(4) $\mathcal{B} = ((8, 2, 5, 0), (-2, 2, 0, 5))$.

Exercice 9.

- (1) $\text{rg}(\mathcal{F}) = 3$.
(2) $\text{rg}(\mathcal{F}) = 2$.
(3) $\text{rg}(\mathcal{F}) = 3$.
(4) $\text{rg}(\mathcal{F}) = 3$.

Exercice 10.

- (1) Montrer que $\mathcal{B}$ est libre, que $\text{card}(\mathcal{B}) = \dim \mathbb{R}^3$ et conclure.
(2) $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u_4) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
(3) La famille (u_1, u_2, u_4) n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 11.

- (1) A faire!
(2) $\mathcal{B}_F = ((-1, 1, 0, \dots, 0), (-1, 0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (-1, 0, \dots, 0, 1))$, $\dim F = n - 1$, $\mathcal{B}_G = ((1, \dots, 1))$, $\dim G = 1$.

- (3) Vérifier que $\dim F + \dim G = n$, puis que F et G sont en somme directe et conclure.

Exercice 12.

- (1) Montrer que (A, B, C, D) est libre et conclure avec le cardinal.
 (2) $\text{mat}_{(A,B,C,D)}(E) = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$.
 (3) $\text{rg}(A, B, C, F) = 3$ et (A, B, C, F) n'est pas une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 13.

- (1) Vérifier notamment que E est stable par combinaisons linéaires.
 (2) Montrer que : $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha 2^n + \beta 3^n$.
 (3) $\mathcal{B}_E = ((2^n)_{n \in \mathbb{N}}, (3^n)_{n \in \mathbb{N}})$ et $\dim E = 2$.

Exercice 14.

- (1) Exprimer F_0, F_1, F comme des Vect.
 (2) Vérifier que ces familles sont libres et utiliser la question précédente.
 (3) $\mathcal{B}_F = (x \mapsto x(x-1), \dots, x \mapsto x^{n-1}(x-1))$. Vérifier que $E = F_0 + F_1$ avec la formule de Grassmann.
 Cette somme n'est pas directe.

Exercice 15.

- (1) Vérifier entre autres que E_n est stable par combinaisons linéaires.
 (2) $\mathcal{B}_{E_n} = \left(x \mapsto x - \frac{1}{2}, \dots, x \mapsto x^n - \frac{1}{n+1}\right)$ et $\dim E_n = n$.

Exercice 16.

- (1) Vérifier entre autres que F est stable par combinaisons linéaires.
 (2) Penser à dériver $v'w - vw'$.
 (3) Vérifier que $f''(x) = (1+x^2)f(x)$ et $g''(x) = (1+x^2)g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis que (f, g) est libre.
 (4) Montrer que $\left(\frac{h}{f}\right)' = \frac{\lambda}{f^2}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$, puis intégrer cette relation.
 (5) Montrer que (f, g) est une base de F , et que $\dim F = 2$.

Exercice 17.

- (1) A faire!
 (2) Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est libre et conclure avec le cardinal.
 (3) $\text{mat}_{(L_0, \dots, L_n)}(P) = \begin{pmatrix} P(a_0) \\ P(a_1) \\ \vdots \\ P(a_n) \end{pmatrix}$.
 (4) Appliquer la question précédente aux polynômes $P : x \mapsto 1$ et $Q : x \mapsto x$.

Exercice 18. Trouver d'abord des bases de F, G, H :

$$\mathcal{B}_E = (x \mapsto x(x-1)(x-2)), \quad \mathcal{B}_F = (x \mapsto (x-1)(x-2)(x-3)), \quad \mathcal{B}_G = (x \mapsto 1, x \mapsto x^2).$$

Vérifier ensuite que la concaténation de ces bases forme une base de $\mathbb{R}_3[x]$.

3. EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

Exercice 19.

- (1) $\mathcal{S} = \emptyset$.
 (2) $\mathcal{S} = \{(-y-3t, y, 2t, t), (y, t) \in \mathbb{R}^2\}$.

Exercice 20.

$$\begin{aligned}
 (1) \mathcal{S}_a &= \begin{cases} \left\{ \left(\frac{2}{a-1}, \frac{1}{1-a}, \frac{1}{1-a} \right) \right\} & \text{si } a \neq -2, 1 \\ \emptyset & \text{si } a = 1 \end{cases} \\
 (2) \mathcal{S}_a &= \begin{cases} \left\{ (z-1, z, z), z \in \mathbb{R} \right\} & \text{si } a = -2 \\ \left\{ \left(1 + \frac{2}{(a-1)(a-2)}, -\frac{3}{(a-1)(a-2)}, \frac{1}{(a-1)(a-2)} \right) \right\} & \text{si } a \neq 1, 2 \\ \{(2z+1, -3z, z), z \in \mathbb{R}\} & \text{si } a = 1, 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Exercice 21. $\text{rg}(\mathcal{F}) = \begin{cases} 3 & \text{si } m \neq \frac{1}{2} \\ 2 & \text{si } m = \frac{1}{2} \end{cases}.$

Exercice 22. En passant par le calcul du rang, vérifier que $(u_2 = 1, u_1, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $m \notin \{-1, 0, 2\}$.

Exercice 23.

- (1) (a) A faire!
- (b) $\text{rg}(u_1, u_2, u_3, u_4) = 3$. Cette famille n'est pas une base de $\mathbb{R}^4$.
- (c) Calculer le rang de $\mathcal{F}$ et conclure avec le cardinal.
- (d) $\text{mat}_{\mathcal{F}}(u_4) = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$
- (2) (a) A faire!
- (b) $\mathcal{B}_H = ((-2, 1, 0, 0), (-3, 0, 1, 0), (-4, 0, 0, 1))$ et $\dim H = 3$.
- (c) $H \cap \text{Vect}(u_3) = \{(0, 0, 0, 0)\}$. En déduire que $H + \text{Vect}(u_3) = \mathbb{R}^4$.
- (d) $\mathcal{B}_{H \cap K} = ((-8, -2, -12, 8), (-9, -14, 11, 1))$ et $\dim H \cap K = 2$.
- (e) Utiliser Grassmann pour vérifier que $H + K = \mathbb{R}^4$. Cette somme n'est pas directe.

Exercice 24. $\text{mat}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} \frac{P^{(0)}(a)}{0!} \\ \frac{P^{(1)}(a)}{1!} \\ \vdots \\ \frac{P^{(n)}(a)}{n!} \end{pmatrix}.$

Exercice 25.

- (1) Soit k le plus petit entier tel que $\lambda_k \neq 0$. Commencer par factoriser P par $x \mapsto (x-a)^k$.
- (2) En supposant que $\sum_{k=0}^n \lambda_k P_k = 0$, montrer que l'ordre de multiplicité de a est infini, et aboutir à une contradiction si tous les λ_k ne sont pas nuls. En déduire que $(P_0, \dots, P_n)$ est libre, puis que c'est une base de $\mathbb{R}_n[x]$ à l'aide du cardinal.

Exercice 26. Résoudre le système $\lambda u_n + \mu v_n + \delta w_n = 0$ obtenu pour $n = 0, 1, 3$.

Exercice 27. Vérifier que $f_1 = f_3 - f_4$ et $f_2 = f_3 + f_4$. En déduire que (f_3, f_4) est une base de F et que $\dim F = 2$.

Exercice 28.

- (1) Vérifier entre autres que F et G sont stables par combinaisons linéaires.
- (2) Procéder par Analyse-Synthèse!

Exercice 29. Procéder comme à l'exercice précédent!

Exercice 30.

- (1) (a) Vérifier entre autres que E_λ est stable par combinaisons linéaires.
 (b) Dériver g et constater que $g' = 0$, puis conclure.
 (c) $\mathcal{B}_{E_\lambda} = (x \mapsto e^{\lambda x})$ et $\dim E_\lambda = 1$.
- (2) (a) Procéder comme en (1)(a) !
 (b) Vérifier que f_1 et f_2 appartiennent à F car $f_1'' - 5f_1' + 6f_1 = 0$ et $f_2'' - 5f_2' + 6f_2 = 0$. Montrer ensuite que (f_1, f_2) est libre.
 (c) Calculer h' et h'' et conclure.
 (d) Partant du fait que $h'' = h'$, écrire que $h'(x) = \alpha e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ d'après la question (1). Intégrer cette relation sous la forme $h(x) = \alpha e^x + \beta$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et conclure.
 (e) $\mathcal{B}_F = (x \mapsto e^{2x}, x \mapsto e^{3x})$ et $\dim F = 2$.

Exercice 31.

- (1) (a) A faire!
 (b) Ecrire que $m_{i,n} = -m_{i,1} - \dots - m_{i,n-1}$, puis reporter dans l'écriture de M si $M \in L_0$.
 (c) Vérifier que la famille obtenue en (1)(b) est une base de L_0 , et en déduire que $\dim L_0 = n(n-1)$.
- (2) (a) A vérifier par le calcul!
 (b) Procéder par Analyse-Synthèse avec (2)(a). En déduire que $\dim L = n^2 - n + 1$.
- (3) (a) A vérifier!
 (b) Montrer que la famille $(E_{i,j} - E_{i,n} - E_{n,j} + E_{n,n})_{1 \leq i,j \leq n-1}$ est une base de $L_0 \cap C_0$. En déduire que $\dim L_0 \cap C_0 = (n-1)^2$.
- (4) (a) Commencer par écrire que : $M \in L \cap C \iff \exists K, K' \in \mathbb{R}, M \in L_K \cap C_{K'}$. Vérifier ensuite en sommant les coefficients de M que $K = K'$, et conclure.
 (b) Montrer que $L \cap C = \text{Vect}(I_n) \oplus (L_0 \cap C_0)$, et en déduire que $\dim L \cap C = (n-1)^2 + 1$.

Exercice 32.

- (1) (a) Partant d'une relation de la forme $\sum_{k=0}^n \lambda_k S_k$, évaluer cette relation en $x = 0, 1, \dots, n-1$, ou alors utiliser le fait que la famille $(S_k)_{0 \leq k \leq n}$ est échelonnée en degrés.
 (b) Vérifier que $(S_k)_{0 \leq k \leq m}$ est une base de $\mathbb{R}_m[x]$ et conclure.
- (2) (a) $S_k(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq n \leq k-1 \\ \frac{n!}{(n-k)!} & \text{si } n \geq k \end{cases}$.
 (b) (i) Utiliser la question (2)(a) !
 (ii) Conclure en obtenant une combinaison linéaire de sommes partielles de séries exponentielles (à un décalage d'indice près). On trouve que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!} = e \sum_{k=0}^{+\infty} a_k.$$

- (c) Considérer le polynôme $P : x \mapsto x^2(x-1)\dots(x-p)$ pour justifier la convergence avec la question (2)(b). On trouve $S = pe$.

Exercice 33. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k f^k = 0$. Si l'on pose $P : x \mapsto \sum_{k=1}^n \lambda_k x^k$, alors on voit que $P(f) = 0$, c'est-à-dire ; $\forall x \in \mathbb{R}, P(f(x)) = 0$. En particulier, $f(x)$ est racine de P pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, $f(\mathbb{R})$ est un intervalle d'après le TVI. Si $P \neq 0$, alors P admet un nombre fini de racines. Donc $f(\mathbb{R})$ est un singleton, impossible car f n'est pas constante par hypothèse. Conclure.