TRAVAUX DIRIGÉS : APPLICATIONS LINÉAIRES ET MATRICES (RÉPONSES - INDICATIONS)

1. Calcul matriciel

Exercice 1.

$$(1)\quad 2,\quad (2)\quad 2,\quad (3)\quad 2,\quad (4)\quad 2,$$

$$(5)\quad 3,\quad (6)\quad 3,\quad (7)\quad 3,\quad (8)\quad 4.$$

Exercice 2.

(1) A est inversible et $A^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, (2) A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,

(3) A n'est pas inversible, (4) A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$,

(5) A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, (6) A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1/2 & 1 \\ -1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$,

(7) A n'est pas inversible, (8) A n'est pas inversible.

Exercice 3. A l'aide de la formule du binôme, on trouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1)/2 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.

(1) D'après le cours, on sait que B est inversible si et seulement si $\mathrm{rg}(B) = n$. En calculant le rang de B, on trouve alors que $B = J + aI_n$ est inversible si et seulement si $a \notin \{0, -n\}$.

(2) En utilisant la formule du binôme, on trouve que, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$B^p = a^p I_n + \frac{1}{n}\left((a+n)^p - a^p\right) J.$$

Exercice 5.

(1) $a = 0$, $b = -3$, $c = -1$.

(2) $A^{-1} = A^2 - 3I_3$.

Exercice 6.

(1) (a) *Question de cours* : cf. cours de première année. On rappelle que $(x_1, ..., x_p)$ est une base de $\mathrm{Vect}(x_1, ..., x_p)$ si et seulement si cette famille est libre.

(b) Si $\lambda_1, ..., \lambda_p, \mu_1, ..., \mu_q$ sont des réels tels que :

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j y_j = 0,$$

alors on voit que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = -\sum_{j=1}^{q} \mu_j y_j$ appartient à $E_1 \cap E_2$. En déduire que les réels $\lambda_1, ..., \lambda_p, \mu_1, ..., \mu_q$ sont tous nuls. On peut conclure que $p + q = \dim(E_1 + E_2)$.

(2) On peut vérifier que :

$$F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

On en déduit que $\dim F = 4$.

(3) Calculer le rang de chaque matrice et vérifier que $\mathrm{rg}(M_i + J) = 4$ pour tout $i \in [\![1, 4]\!]$. On peut montrer ensuite que la famille $(M_i + J)_{1 \leq i \leq 4}$ est libre de façon classique.
(4) En effectuant les opérations élémentaires $C_4 \leftarrow \theta C_4 - a_1 C_1$, puis $C_4 \leftarrow C_4 - a_2 C_2 - a_3 C_3$, on a :

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} \theta & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & \theta & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & \theta & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4\theta - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 \end{pmatrix}.$$

Si $M(a) + \theta J$ est non inversible pour tout $\theta \in \mathbb{R}^*$, alors on trouve avec le rang que la dernière colonne doit être nulle pour tout $\theta \in \mathbb{R}^*$. On en déduit que $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$.
(5) (a) Utiliser la question (4) pour montrer que $G \cap F = \{0\}$, et donc $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G)$. On conclut en utilisant le fait que $F + G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
(b) Soit F l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dont la dernière colonne est nulle. On vérifie que $\dim(F) = 12$ et que F vérifie toutes les conditions demandées.

2. Applications linéaires

Exercice 7. Soit $x \in \mathfrak{Im}(f)$. Alors il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$, et donc $g(x) = g \circ f(y) = 0$. Donc x appartient à $\ker(f)$.

Exercice 8. Utiliser la formule de Grassmann et le théorème du rang.

Exercice 9. Montrer tout d'abord que f^2 est un projecteur, et donc $E = \ker(f^2) \oplus \mathfrak{Im}(f^2)$. Vérifier ensuite que $\ker(f) = \ker(f^2)$.

Exercice 10. Procéder par double implication...

Exercice 11. Si $p \circ q = q \circ p = 0$, on vérifie facilement que $(p + q)^2 = p + q$, et donc $p + q$ est un projecteur. Pour la réciproque, on suppose que $p + q$ est un projecteur. On trouve d'abord que $p \circ q + q \circ p = 0$. On compose ensuite à droite et à gauche par p pour conclure.

Exercice 12. Pour répondre aux questions $(1), (2), (3)$ en même temps, on peut soit procéder par Analyse-Synthèse, soit travailler avec une concaténation d'une base de F et d'une base de G. Si p et s sont respectivement le projecteur et la symétrie recherchés, on trouve que, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$p(x, y, z) = (x, y, z) - (x - y + z)(1, 1, 1) \quad \text{et} \quad s(x, y, z) = (x, y, z) - 2(x - y + z)(1, 1, 1).$$

Exercice 13. Idem qu'à l'exercice 12. On trouve alors que, pour tout $P : x \longmapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2$:

$$p(P) = P - \frac{(a_0 + a_1 + a_2)}{2}(x \longmapsto (x - 2)(x - 3)) \quad \text{et} \quad s(P) = P - (a_0 + a_1 + a_2)(x \longmapsto (x - 2)(x - 3)).$$

Exercice 14.

(1) Procéder par récurrence en utilisant le théorème du rang et la formule de Grassmann.
(2) (a) $\dim\ker(f) = \dim\ker(g) = n - 1$.
(b) Si $\ker(f) = \ker(g)$, on commence par écrire que $E = \mathrm{Vect}(u) \oplus \ker(f)$ et on calcule $f(x)$ et $g(x)$. Montrer ensuite que $f = \frac{f(u)}{g(u)} g$ et conclure. On vérifie ensuite facilement la réciproque.
(c) Si f et g ne sont pas colinéaires, alors on a $\ker(f) \neq \ker(g)$. Donc $\ker(f) \cap \ker(g)$ est un sous-espace vectoriel strict de $\ker(f)$ et $\dim\ker(f) \cap \ker(g) \leq n - 2$. On conclut alors avec la question (1).

Exercice 15. A l'aide de l'exercice 7 et du théorème du rang, on montre que : $\sup_{(u,v) \in A} (\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)) = n$.

Exercice 16. Si u et p commutent, on vérifie facilement que $\ker(p)$ et $\mathfrak{Im}(p)$ sont stables par u. Pour la réciproque, on suppose que $\ker(p)$ et $\mathfrak{Im}(p)$ soient stables par u. On commence par écrire que $E = \ker(p) \oplus \mathfrak{Im}(p)$ (car p est un projecteur). On calcule ensuite $u \circ p(x)$ et $p \circ u(x)$ où $x \in E$, en l'écrivant sous la forme $x = x_1 + x_2$, où $x_1 \in \ker(p)$ et $x_2 \in \mathfrak{Im}(p)$, et on conclut que $p \circ u = u \circ p$.

3. Applications linéaires et matrices

Exercice 17.

(1) Vérifier la linéarité. On trouve :

$$\mathfrak{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Vérifier la linéarité. On trouve :

$$\mathfrak{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}.$$

(3) Vérifier la linéarité. On trouve :

$$\mathfrak{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

(4) Vérifier la linéarité. On trouve :

$$\mathfrak{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}.$$

(5) Vérifier la linéarité. On trouve :

$$\mathfrak{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -7 & -5 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(6) Vérifier la linéarité. On trouve :

$$\mathfrak{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 18. A vérifier en utilisant entre autres les formules d'addition pour cos et sin. On trouve que :

(1) $\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, (2) $\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos(a) & \sin(a) \\ -\sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}$, (3) $\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -\sin(a) & \cos(a) \\ -\cos(a) & -\sin(a) \end{pmatrix}$.

Exercice 19.

(1) A faire pour la première partie. On trouve que :

$$\mathfrak{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) A faire pour la première partie. On trouve que :

$$\mathfrak{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} n & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ n & n-2 & -2 & \ddots & \vdots \\ 0 & n-1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -n \end{pmatrix}.$$

(3) A faire pour la première partie. On trouve que :

$$\mathfrak{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 20. Base de $\ker(f)$: $((1,-1,0),(1,0,1))$. Base de $\mathfrak{Im}(f)$: $((1,-3,2))$. On trouve que $\mathrm{rg}(f) = 1$ et $f \circ f = 0$, donc f est nilpotent.

Exercice 21.

(1) Vérifier que l est linéaire. On trouve que : $a = \dfrac{1}{2}$.

(2) (a) Vérifier que $\mathcal{B}$ est libre, et conclure en utilisant le fait que $\text{card}(\mathcal{B}) = 3 = \dim \mathbb{R}_2[x]$. On a :

$$\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}}(l) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) On obtient que $\ker(l) = \text{Vect}(x \longmapsto x-1)$ et $\mathfrak{Im}(l) = \text{Vect}(x \longmapsto x, x \longmapsto x-1)$.
En passant par le calcul matriciel de la question (2)(a), on trouve que $l^2 = l^3$.

Exercice 22.

(1) Vérifier que f est linéaire et injective, en utilisant le fait que $f(P) = 0$ si et seulement si $x_0, x_1, ..., x_n$ sont racines de P, puis conclure.

(2) On trouve que :

$$\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}.$$

(3) On trouve que $f(L_i) = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ pour tout $i \in \{0, ..., n\}$, où le 1 se trouve en $(i+1)$-ème position.

(4) Montrer que $(L_0, L_1, ..., L_n)$ est libre et conclure en utilisant le fait que $\text{card}(\mathcal{C}) = n+1 = \dim \mathbb{R}_n[x]$.

(5) On trouve que $\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}}(f) = I_{n+1}$.

Exercice 23.

(1) (a) Comme $(x, f(x))$ est liée pour tout $x \in E$, on obtient en remplaçant x par e_i que la famille $(e_i, f(e_i))$ est liée et on conclut.

(b) Par le calcul, on trouve que $f(e_i + e_j) = \lambda_i e_i + \lambda_j e_j = \lambda(e_i + e_j)$, et donc $\lambda = \lambda_i = \lambda_j$.

(c) Comme $\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \lambda I_n$, on a $f = \lambda \text{Id}_E$.

(2) Par contraposition!

Exercice 24. Base de F : $((-1, 1, 2))$. Base de G : $((1, 1, 0), (-1, 0, 1))$. On en déduit que $\dim(F) = 1$ et $\dim(G) = 2$. On poeut vérifier que $F \subset G$, et donc $F \cap G = F$ et $F \cup G = G$. Enfin, on trouve que $\ker(f) = \text{Vect}((1, -2, 1))$ et $\mathfrak{Im}(f) = \text{Vect}((1, 1, 0), (1, 0, -1))$.

Exercice 25.

(1) Vérifier que $\mathcal{B} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$ est libre. Donc c'est une base de F_3.

(2) Si $\alpha \in \mathbb{R}$, vérifier que $\Phi(f_0) = f_0 - e^{\alpha}$. En déduire par l'absurde que $\Phi(f_0)$ n'appartient pas à F_3. Donc Φ n'est pas un endomorphisme de F_3.

(3) (a) Tout d'abord, Φ est linéaire par linéarité de l'intégrale. Ensuite, on montre par des IPP que, pour tout polynôme $u : x \longmapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$:

$$\Phi\left(x \longmapsto u(x)e^{-x}\right) = x \longmapsto \left(u(x) - u'(x) + u''(x) - u'''(x)\right)e^{-x}.$$

En déduire que F_3 est stable par Φ et conclure.

(b) On trouve que :

$$M = \mathfrak{mat}_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Après calculs, on obtient que :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Changement de base - Matrices semblables - Trace

Exercice 26. Déterminer la matrice de passage dans les bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de E, et ce dans chacun des cas suivants :

(1) On trouve que :

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) On trouve que :
$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
(3) On trouve que :
$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
(4) On trouve que :
$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 5 & 7 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$
(5) On trouve que :
$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
(6) On trouve que :
$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & a & \cdots & \cdots & \binom{n}{0}a^n \\ 0 & 1 & \ddots & & \binom{n}{1}a^{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \binom{n}{n-1}a^1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \binom{n}{n}a^0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 27.

(1) $A' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) $A' = \begin{pmatrix} -16 & -25 & -45 \\ 8 & 13 & 20 \\ 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(3) $A' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

(4) $A' = \begin{pmatrix} -1 & -3/2 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \\ 4 & 5/2 & 6 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 28. Soit f l'application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, définie pour tout $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $f(A) = A - {}^tA$.

(1) A faire!

(2) Base de $\ker(f)$: $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

Base de $\mathfrak{Im}(f)$: $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

Conclure que l'endomorphisme f n'est pas un isomorphisme.

(3) Si $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a :
$$M = \mathfrak{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
On trouve alors que $\mathrm{Tr}(f) = 2$.

(4) Soit $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Utiliser le fait que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ et que $\ker(f) = \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, $\mathfrak{Im}(f) = \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$.

(5) Si $\mathcal{B}_0$ est une base adaptée à la décomposition en somme directe ci-dessus, on trouve que :

$$\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D.$$

Conclure que M est semblable à D.

Exercice 29. Calculer la trace de $\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}}(p)$, où $\mathcal{B}$ est obtenue par concaténation d'une base de $\ker(p)$ et d'une base de $\mathfrak{Im}(p)$.

Exercice 30. On voit que $H_n = \ker \mathrm{Tr}$. Comme la trace est une forme linéaire non nulle, on a $\dim H_n = n^2 - 1$.

Exercice 31.

(1) Faire une distinction de cas "rang 0" et "rang 1".
(2) Calculer A^2 et $\mathrm{Tr}(A)$ à l'aide de la décomposition $A = CL$.

Exercice 32.

(1) A faire!
(2) On trouve que $M_a = \begin{pmatrix} n & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n-1 & 2a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & na \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Tr}(f_a) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
(3) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $f_a(x \longmapsto (x-a)^k) = (n-k)(x \longmapsto (x-a)^k)$.
(4) Si l'on pose $\mathcal{B}_a = (x \longmapsto 1, x \longmapsto x - a, ..., x \longmapsto (x-a)^n)$, alors on a :

$$\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}_a}(f_a) = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & n-1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} = D_a.$$

Conclure que M_a est semblable à D_a.

Exercice 33. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation $\mathrm{Tr}(A)X = -\mathrm{Tr}(X)A$. Si $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$, alors $\mathcal{S} = \{0\}$. Si maintenant $\mathrm{Tr}(A) = 0$, alors $\mathcal{S}$ est l'ensemble des matrices de trace nulle.

Exercice 34. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On désigne par $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et par $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Enfin, on considère l'endomorphisme φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $\varphi(M) = {}^tM$.

(1) Procder par Analyse-Synthèse. On a $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.
(2) Calculer la matrice de φ dans une base adaptée à cette décomposition en somme directe, et en déduire la trace de φ. On trouve que $\mathrm{Tr}(\varphi) = n$.

Exercice 35.

(1) A faire!
(2) Montrer que $\ker(T) = \{0\}$ si $\mathrm{Tr}(A) \neq 1$ et $\ker(T) = \mathrm{Vect}(A)$ si $\mathrm{Tr}(A) = 1$, puis conclure.
(3) Si $\mathrm{Tr}(A) = 1$, vérifier que $T \circ T = T$. Conclure que T est le projecteur sur $\ker \mathrm{Tr}$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(A)$.

Exercice 36. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si l'on suppose que $\mathcal{S}(A) = \{A\}$, alors on voit que A commute avec toutes les matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En particulier, si $i \neq j$, alors A commute avec $I_n + E_{i,j}$. En particulier, on obtient après calculs que A est un multiple de I_n. Etablir alors la réciproque.

5. Exercices supplémentaires

Exercice 37. Utiliser la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 38. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \neq 0$ et $f \circ f = 0$.

(1) Comme $f \circ f = 0$, on a $\mathfrak{Im}(f) \subset \ker(f)$. On utilise ensuite le théorème du rang.
(2) Prendre $e_1 \notin \ker(f)$, $e_2 \in \ker(f) \setminus \{0\}$ et vérifier.
(3) Vérifier que $\mathcal{B}$ est libre et conclure. On trouve que :

$$\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4) Utiliser l'endomorphisme f canoniquement associé à la matrice M, et conclure avec les questions (1), (2), (3).

Exercice 39. Calculer P^2 et vérifier que $\operatorname{rg}(p) = 2$. Base de $\ker(p)$: $((1, -1, 1))$. Base de $\mathfrak{Im}(p)$: $((0, 1, -1), (1, 0, 1))$.

Exercice 40.

(1) Utiliser le fait que f^{p-1} n'est pas l'endomorphisme nul.
(2) Procéder par récurrence pour montrer que la famille $\mathcal{F} = (x_0, f(x_0), ..., f^{p-1}(x_0))$ est libre. Comme cette famille est libre, son cardinal est $\leq n$.
(3) Comme $\mathcal{F}$ est libre et que $p = n$, il s'ensuit que $\mathcal{F}$ est une base de E. De plus :

$$\mathfrak{mat}_{\mathcal{F}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 41. Pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $f(M) = AM - MA$, où : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

(1) A faire!
(2) Base de $\ker(f)$: $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\right)$.

Base de $\mathfrak{Im}(f)$: $\left(\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$.

L'endomorphisme f n'est pas un isomorphisme.

(3) Avec la base canonique $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, on trouve que :

$$\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \operatorname{Tr}(f) = 0.$$

Exercice 42.

(1) $\dim \ker(f) = n$ et $\dim \mathfrak{Im}(f) = 1$. Base de $\ker(f)$: $\left(x \longmapsto x - \frac{1}{2}, x \longmapsto x^2 - \frac{1}{3}, ..., x \longmapsto x^n - \frac{1}{n+1}\right)$.
(2) Vérifier que $\left(x \longmapsto 1, x \longmapsto x - \frac{1}{2}, x \longmapsto x^2 - \frac{1}{3}, ..., x \longmapsto x^n - \frac{1}{n+1}\right)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
(3) On trouve que, pour tout $P : x \longmapsto a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$:

$$p(P) = P - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}.$$

Exercice 43.

(1) Vérifier que f_λ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$. Si $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$, on trouve que :

$$\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 1 & \cdots & \cdots & \binom{n}{0} \\ 0 & \lambda+1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \binom{n}{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda+1 \end{pmatrix}.$$

(2) f_λ est un isomorphisme si et seulement si $\lambda \neq -1$.

(3) $\mathrm{Tr}(f_\lambda) = (n+1)(\lambda+1)$.
Base de $\ker(f_{-1})$: $(x \longmapsto 1)$.
Base de $\mathfrak{Im}(f_{-1})$: $(x \longmapsto 1, x \longmapsto x, ..., x \longmapsto x^{n-1})$.

Exercice 44. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$, on pose $f(P) : x \longmapsto (x-a)P'(x) + P(x) - P(a)$.

(1) A faire!

(2) Si $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$, on trouve que :

$$\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -2a & \cdots & \cdots & a^n \\ 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -na \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n+1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $\mathrm{Tr}(f) = \dfrac{n(n+3)}{2}$, $\mathrm{rg}(f) = n$ et $\ker(f) = \mathrm{Vect}(x \longmapsto 1)$.

(3) Calculer $f(P)(a)$ et conclure.
Base de $\mathfrak{Im}(f)$: $(x \longmapsto x-a, x \longmapsto (x-a)x, ..., x \longmapsto (x-a)x^{n-1})$.

Exercice 45.

(1) $\ker(\Phi)$ est l'espace vectoriel des suites constantes et $\dim\ker(\Phi) = 1$.
$\ker(\Phi^2) = \{(u_n) \in E \mid \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = an+b\}$ et $\dim\ker(\Phi^2) = 2$.
$\mathfrak{Im}(\Phi) = E$.

(2) (a) A faire!
(b) Idem!
(c) Montrer par récurrence que, si $u_0 = u_1 = u_2 = 0$, alors $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(d) $\dim\ker(\Phi^3) = 3$, base de $\ker(\Phi^3)$: $((x_n), (y_n), (z_n))$.

Exercice 46. D'après le théorème du rang, on a $\dim\ker(f) + \dim\mathfrak{Im}(f) = 3$. Si $f \neq 0$, alors on trouve que soit $\dim\ker(f) = 1$ et $\dim\mathfrak{Im}(f) = 2$, soit $\dim\ker(f) = 2$ et $\dim\mathfrak{Im}(f) = 1$. Comme $\ker(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, on peut en déduire que $\ker(f) \subset \mathfrak{Im}(f)$ ou $\mathfrak{Im}(f) \subset \ker(f)$.

Exercice 47. Comme $g \circ f = p$, on peut vérifier que $\ker(f) \subset \ker(p)$, et donc $\dim\ker(f) \leq 1$ d'après le théorème du rang. De plus, comme $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, f n'est pas injective, ce qui entraine que $\dim\ker(f) = 1$, et donc $\mathrm{rg}(f) = 2$. De même, on trouve que $\mathrm{rg}(g) = 2$.

Exercice 48. Si X est le vecteur colonne de composantes $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ et si $P : x \longmapsto a_0 + a_1x + ... + a_{n-1}x^{n-1}$, on peut remarquer que $MX = 0$ si et seulement si $1, 2, ..., n$ sont racines de P, et conclure à partir de là.

Exercice 49.

(1) Si $y \in \mathfrak{Im}(g)$, il existe $z \in \mathfrak{Im}(f)$ tel que $y = g(z)$. Il existe alors $t \in E$ tel que $y = g(f(t)) = f^2(t)$, et donc $\mathfrak{Im}(g) \subset \mathfrak{Im}(f^2)$. Etablir l'inclusion réciproque de la même manière. Idem pour $\ker(g) = \ker(f) \cap \mathfrak{Im}(f)$.

(2) D'après le théorème du rang et la question (1), on voit que $\mathrm{rg}(f^2) = \mathrm{rg}(g) = 3n - \dim\ker(g)$ et $\dim\ker(g) \leq \dim\mathfrak{Im}(f)$. Conclure à partir de là.

Exercice 50.

(1) (a) Ecrire que $\dim E = \sum_{i=1}^k \dim F_i = \sum_{i=1}^k \dim\mathfrak{Im}(p_i)$ et conclure.
(b) Soit $x \in E$. Ecrire x sous la forme $x = \sum_{i=1}^k x_i$, où x_i appartient à F_i pour tout $i \in [\![1,k]\!]$. Alors $x_i = p_i(x)$ pour tout $i \in [\![1,k]\!]$. Conclure.
(c) Procéder comme à la question (1)(b).

(2) Dans cette question, on considère des endomorphismes $q_1, ..., q_k$ de E, tous non nuls et tels que :

$$q_1 + q_2 + ... + q_k = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}(q_1) + \mathrm{rg}(q_2) + ... + \mathrm{rg}(q_k) \leq n.$$

  (a) Par définition, on voit que $\sum_{i=1}^k \mathfrak{Im}(q_i)$ est un sous-espace vectoriel de E. Comme $\sum_{i=1}^k q_i = \mathrm{Id}_E$, montrer que $E = \sum_{i=1}^k \mathfrak{Im}(q_i)$. En déduire que la somme en question est directe.
  (b) Vérifier que $(q_1 + ... + q_k) \circ q_i = q_i$, développer le tout et utiliser la question $(2)(a)$.
  (c) Conclure avec la question $(2)(b)$.

Exercice 51. Comme L_1 et L_2 sont triangulaires inférieures et que tous leurs coefficients diagonaux sont égaux à 1, on voit que L_1 et L_2 sont inversibles. De plus, L_2^{-1} est aussi triangulaire inférieure, ainsi que $L_2^{-1}L_1$ (comme inverse et produit de matrices triangulaires inférieures). Dès lors, comme U_1 et U_2 sont triangulaires supérieures inversibles et que $L_1U_1 = L_2U_2$, on voit que $L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}$. En particulier, $L_2^{-1}L_1$ est à la fois triangulaire supérieure et inférieure, et donc elle est diagonale. Enfin, comme tous les coefficients diagonaux de $L_2^{-1}L_1$ sont égaux à 1 (vu que c'est déjà le cas pour les matrices triangulaires inférieures L_1 et L_2), il s'ensuit que $L_2^{-1}L_1 = I_n$, et donc $L_1 = L_2$.

Exercice 52.

(1) Procéder par inclusion, puis passer aux dimensions.
(2) Montrer que $\mathfrak{Im}(A^{k+1}) \subset \mathfrak{Im}(A^k)$ pour tout $k \geq 1$, puis conclure.
(3) Vérifier que, si $\ker(A^{k_0}) = \ker(A^{k_0+1})$, alors $\ker(A^{k_0+1}) = \ker(A^{k_0+2})$, puis conclure. Avec le théorème du rang, en déduire que les suites $(v_k)_{k \geq k_0}$ et $(w_k)_{k \geq k_0}$ sont constantes.
(4) Pour $p = 1$, on prendra la matrice $M_1 = 0$. Pour $p = 2$, on choisira :

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Enfin, pour $p = 3$, on pourra prendre la matrice :

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(5) Procéder comme à l'exercice 40!
(6) On suppose qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = B$. Vérifier que M est nilpotente, puis que son indice de nilpotence est $\geq 2n - 1$. Aboutir à une contradiction avec la question précédente!