

Corrigé du Devoir Maison de Mathématiques n°1

Corrigé de l'exercice 1. On considère la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt$.

(1) Calculons les valeurs de I_0, I_1, I_2 . Tout d'abord, on voit que :

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} \cos^0(t) dt = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Ensuite, on constate que :

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos^1(t) dt = \int_0^{\pi/2} \cos(t) dt = [\sin(t)]_0^{\pi/2} = 1 - 0 = 1.$$

Enfin, passons au calcul de $I_2 = \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) dt$. Pour ce faire, on pose $u(t) = \cos(t)$ et $v(t) = \sin(t)$ pour tout $t \in [0, \pi/2]$. Alors u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$, et de plus : $u'(t) = -\sin(t)$ et $v'(t) = \cos(t)$ pour tout $t \in [0, \pi/2]$. Par intégration par parties et linéarité de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) dt &= \int_0^{\pi/2} u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} u'(t)v(t) dt \\ &= [\cos(t)\sin(t)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -\sin(t)\sin(t) dt \\ &= 0 - 0 + \int_0^{\pi/2} \sin^2(t) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2(t)) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} dt - \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) dt \\ &= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) dt. \end{aligned}$$

Dès lors, il s'ensuit que $2 \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) dt = \frac{\pi}{2}$, et donc $\int_0^{\pi/2} \cos^2(t) dt = \frac{\pi}{4}$. Par conséquent, on en déduit que :

$$I_0 = \frac{\pi}{2}, I_1 = 1, I_2 = \frac{\pi}{4}.$$

(2) (a) Etudions tout d'abord la monotonie de la suite $(I_n)_{n \geq 0}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient par linéarité de l'intégrale que :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1}(t) dt - \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt = \int_0^{\pi/2} (\cos(t) - 1) \cos^n(t) dt.$$

Comme $0 \leq \cos(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0, \pi/2]$, on voit que $(\cos(t) - 1) \cos^n(t) \leq 0$ pour tout $t \in [0, \pi/2]$. Dès lors, il s'ensuit par positivité de l'intégrale que $I_{n+1} - I_n \leq 0$. Mais comme ceci est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que :

la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.

A présent, montrons que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ converge. Comme $0 \leq \cos(t)$ pour tout $t \in [0, \pi/2]$, on voit que $\cos^n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, \pi/2]$, et donc $I_n \geq 0$ par positivité de l'intégrale. Dès lors, comme la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante et minorée par 0, le théorème de la limite monotone entraîne que :

la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ converge.

- (b) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2})$. Pour ce faire, on pose $u(t) = \cos^{n+1}(t)$ et $v(t) = \sin(t)$ pour tout $t \in [0, \pi/2]$. Alors u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$, et de plus : $u'(t) = -(n+1)\sin(t)\cos^n(t)$ et $v'(t) = \cos(t)$ pour tout $t \in [0, \pi/2]$. Par intégration par parties et linéarité de l'intégrale, on trouve que :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi/2} \cos^{n+2}(t) dt &= \int_0^{\pi/2} u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} u'(t)v(t) dt \\
 &= [\cos^{n+1}(t)\sin(t)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -(n+1)\sin(t)\cos^n(t)\sin(t) dt \\
 &= 0 - 0 + (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\cos^n(t) dt \\
 &= (n+1) \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2(t))\cos^n(t) dt \\
 &= (n+1) \left[\int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt - \int_0^{\pi/2} \cos^{n+2}(t) dt \right]
 \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit par définition de $(I_n)_{n \geq 0}$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2})}.$$

- (c) Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) : "I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}."$$

Tout d'abord, on peut remarquer que $\mathcal{P}(0)$ est vraie. En effet, d'après la question (1), on a :

$$I_0 = \frac{\pi}{2} = \frac{(2 \times 0)!}{(2^0 0!)^2} \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_1 = 1 = \frac{(2^0 0!)^2}{(2 \times 0 + 1)!}.$$

A présent, supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vraie. Par hypothèse de récurrence, on sait que :

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

D'après la question (2)(b), on sait aussi que $I_{m+2} = (m+1)(I_m - I_{m+2})$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, ce qui entraîne que $(1+m+1)I_{m+2} = (m+1)I_m$, et donc on a pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$I_{m+2} = \frac{m+1}{m+2} I_m.$$

Dès lors, ceci nous donne en remplaçant m par $2n$ que :

$$\begin{aligned}
 I_{2n+2} &= \frac{2n+1}{2n+2} I_{2n} \\
 &= \frac{2n+1}{2n+2} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} \\
 &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(2n+2)^2} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} \\
 &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{2^2(n+1)^2} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2} \\
 &= \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}((n+1)!)^2} \frac{\pi}{2} \\
 &= \frac{(2n+2)!}{(2^{n+1}(n+1)!)^2} \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

De même, on obtient en remplaçant m par $2n + 1$ que :

$$\begin{aligned}
 I_{2n+3} &= \frac{2n+2}{2n+3} I_{2n+1} \\
 &= \frac{2n+2}{2n+3} \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \\
 &= \frac{(2n+2)^2}{(2n+3)(2n+2)} \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \\
 &= \frac{(2(n+1))^2}{(2n+3)(2n+2)} \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \\
 &= \frac{2^2(n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \\
 &= \frac{2^{2n+2}((n+1)!)^2}{(2n+3)!} \\
 &= \frac{(2^{n+1}(n+1)!)^2}{(2n+3)!}.
 \end{aligned}$$

En particulier, il s'ensuit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout ordre $n \in \mathbb{N}$. En d'autres termes, on vient de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} \text{ et } I_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

- (3) (a) Rappelons un équivalent simple de $\cos(x) - 1$ et $\ln(1+x)$ au voisinage de 0. D'après le cours, on sait que :

$$\cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \text{ et } \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$$

- (b) Montrons tout d'abord que : $n \ln(\cos(n^{-1/4})) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2}\sqrt{n}$. Pour ce faire, on pose $x = \cos(n^{-1/4}) - 1$. Comme $n^{-1/4}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et que la fonction $\cos$ est continue en 0, on voit que x tend vers $1 - 1 = 0$ quand n tend vers $+\infty$. Comme $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, on obtient par substitution que :

$$\ln(\cos(n^{-1/4})) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \cos(n^{-1/4}) - 1. \quad (1)$$

De plus, comme $n^{-1/4}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et que $\cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$, on trouve de nouveau par substitution que :

$$\cos(n^{-1/4}) - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{(n^{-1/4})^2}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{n^{-1/2}}{2}. \quad (2)$$

Dès lors, il s'ensuit d'après (1) et (2) que :

$$n \ln(\cos(n^{-1/4})) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \times -\frac{n^{-1/2}}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{n^{1/2}}{2}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$n \ln(\cos(n^{-1/4})) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2}\sqrt{n}.$$

A présent, déterminons la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\cos(n^{-1/4}))^n$. Comme $n \ln(\cos(n^{-1/4})) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2}\sqrt{n}$, on voit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(\cos(n^{-1/4})) = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}\sqrt{n} = -\infty.$$

Comme la fonction $\exp$ tend vers 0 en $-\infty$, il s'ensuit par composition des limites que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\cos(n^{-1/4}))^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln(\cos(n^{-1/4}))} = 0.$$

Par conséquent, on vient de montrer que :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\cos \left(n^{-1/4} \right) \right)^n = 0.}$$

- (c) Montrons que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\cos \left(n^{-2/3} \right) \right)^n = 1$. Pour ce faire, on pose $x = \cos \left(n^{-2/3} \right) - 1$. Comme $n^{-2/3}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et que la fonction $\cos$ est continue en 0, on voit que x tend vers $1 - 1 = 0$ quand n tend vers $+\infty$. Comme $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, on a par substitution que :

$$\ln \left(\cos \left(n^{-2/3} \right) \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \cos \left(n^{-2/3} \right) - 1. \quad (1)$$

De plus, comme $n^{-2/3}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et que $\cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$, on trouve de nouveau par substitution que :

$$\cos \left(n^{-2/3} \right) - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{(n^{-2/3})^2}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{n^{-4/3}}{2}. \quad (2)$$

Dès lors, il s'ensuit d'après (1) et (2) que :

$$n \ln \left(\cos \left(n^{-2/3} \right) \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \times -\frac{n^{-4/3}}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{n^{-1/3}}{2}.$$

En particulier, on vient de montrer que :

$$n \ln \left(\cos \left(n^{-2/3} \right) \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{n^{-1/3}}{2}. \quad (3)$$

Dès lors, il s'ensuit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \left(\cos \left(n^{-2/3} \right) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{n^{-1/3}}{2} = 0.$$

Comme la fonction $\exp$ est continue en 0, il s'ensuit par composition des limites que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\cos \left(n^{-2/3} \right) \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln(\cos(n^{-2/3}))} = 1.$$

Par conséquent, on vient de montrer que :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\cos \left(n^{-2/3} \right) \right)^n = 1.}$$

- (4) (a) Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\int_0^{n^{-1/4}} \cos^n(t) dt \leq n^{-1/4}$. Comme $-1 \leq \cos(t) \leq 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, on voit que $\cos^n(t) \leq 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Dès lors, il s'ensuit par croissance de l'intégrale que :

$$\int_0^{n^{-1/4}} \cos^n(t) dt \leq \int_0^{n^{-1/4}} dt.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\int_0^{n^{-1/4}} \cos^n(t) dt \leq n^{-1/4}.}$$

- (b) Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\int_{n^{-1/4}}^{\pi/2} \cos^n(t) dt \leq \frac{\pi}{2} \left(\cos \left(n^{-1/4} \right) \right)^n$. Comme la fonction $\cos$ est décroissante et positive sur $[0, \pi/2]$, on voit que $\cos^n(t) \leq \left(\cos \left(n^{-1/4} \right) \right)^n$ pour tout $t \in [n^{-1/4}, \pi/2]$. Dès lors, il s'ensuit par croissance de l'intégrale que :

$$\int_{n^{-1/4}}^{\pi/2} \cos^n(t) dt \leq \int_{n^{-1/4}}^{\pi/2} \left(\cos \left(n^{-1/4} \right) \right)^n dt.$$

En particulier, ceci nous donne que :

$$\int_{n^{-1/4}}^{\pi/2} \cos^n(t) dt \leq \left(\frac{\pi}{2} - n^{-1/4} \right) \left(\cos \left(n^{-1/4} \right) \right)^n.$$

Mais comme $0 \leq \frac{\pi}{2} - n^{-1/4} \leq \frac{\pi}{2}$, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\int_{n^{-1/4}}^{\pi/2} \cos^n(t) dt \leq \frac{\pi}{2} \left(\cos \left(n^{-1/4} \right) \right)^n.}$$

- (c) Montrons que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$. D'après la relation de Chasles et les questions (4)(a) et (4)(b), on trouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n = \int_0^{n^{-1/4}} \cos^n(t) dt + \int_{n^{-1/4}}^{\pi/2} \cos^n(t) dt \leq n^{-1/4} + \frac{\pi}{2} \left(\cos \left(n^{-1/4} \right) \right)^n.$$

Comme $I_n \geq 0$ d'après la question (2)(a), ceci nous donne que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq I_n \leq n^{-1/4} + \frac{\pi}{2} \left(\cos \left(n^{-1/4} \right) \right)^n.$$

Mais comme $\left(\cos \left(n^{-1/4} \right) \right)^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ d'après la question (3)(b), le terme de droite dans l'encadrement ci-dessus tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Par conséquent, on en déduit d'après le théorème d'encadrement que :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.}$$

- (5) (a) Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $I_n \geq \int_0^{n^{-2/3}} \cos^n(t) dt \geq n^{-2/3} \left(\cos \left(n^{-2/3} \right) \right)^n$. D'après la relation de Chasles, on voit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n = \int_0^{n^{-2/3}} \cos^n(t) dt + \int_{n^{-2/3}}^{\pi/2} \cos^n(t) dt. \quad (1)$$

Comme la fonction $\cos$ est positive sur l'intervalle $[n^{-2/3}, \pi/2]$, la fonction $\cos^n$ est aussi positive sur $[n^{-2/3}, \pi/2]$. Dès lors, on obtient par positivité de l'intégrale que :

$$\int_{n^{-2/3}}^{\pi/2} \cos^n(t) dt \geq 0.$$

En particulier, ceci entraîne avec la relation (1) que :

$$I_n \geq \int_0^{n^{-2/3}} \cos^n(t) dt. \quad (2)$$

De plus, comme la fonction $\cos$ est décroissante et positive sur $[0, \pi/2]$, on voit que $\cos^n(t) \geq \left(\cos \left(n^{-2/3} \right) \right)^n$ pour tout $t \in [0, n^{-2/3}]$. Dès lors, il s'ensuit par croissance de l'intégrale que :

$$\int_0^{n^{-2/3}} \cos^n(t) dt \geq \int_0^{n^{-2/3}} \left(\cos \left(n^{-2/3} \right) \right)^n dt = n^{-2/3} \left(\cos \left(n^{-2/3} \right) \right)^n. \quad (3)$$

Par conséquent, on en déduit avec les relations (2) et (3) que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{I_n \geq \int_0^{n^{-2/3}} \cos^n(t) dt \geq n^{-2/3} \left(\cos \left(n^{-2/3} \right) \right)^n.}$$

- (b) Déterminons la nature de la série de terme général I_n . Pour ce faire, on suppose que la série $\sum I_n$ converge. D'après la question précédente, on sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n \geq n^{-2/3} \left(\cos \left(n^{-2/3} \right) \right)^n \geq 0.$$

Par comparaison de séries à termes positifs, on obtient que la série $\sum n^{-2/3} \left(\cos \left(n^{-2/3} \right) \right)^n$ converge aussi. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\cos \left(n^{-2/3} \right) \right)^n = 1$ d'après la question (3)(c), on voit par ailleurs que $\left(\cos \left(n^{-2/3} \right) \right)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$, et donc :

$$n^{-2/3} \left(\cos \left(n^{-2/3} \right) \right)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^{-2/3}.$$

Par équivalence de séries à termes positifs, il s'ensuit que la série de Riemann $\sum n^{-2/3}$ converge, ce qui est impossible car $-2/3 > -1$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\sum I_n \text{ diverge.}}$$

- (6) On rappelle que : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.

- (a) Montrons que, pour tout $t \in]-\pi, \pi[$, on a : $\cos(t) + 1 = \frac{2}{1 + \tan^2(t/2)}$. D'après la formule d'addition pour $\cos$, on a pour tout $t \in]-\pi, \pi[$:

$$\begin{aligned}
 \cos(t) + 1 &= \cos\left(\frac{t}{2} + \frac{t}{2}\right) + 1 \\
 &= \cos\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right) + 1 \\
 &= \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) + 1 \\
 &= \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) \\
 &= 2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right).
 \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme $1 + \tan^2 = \tan' = \frac{1}{\cos^2}$, ceci entraîne que :

$$\cos(t) + 1 = 2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{2}{1 + \tan^2(t/2)}.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $t \in]-\pi, \pi[$:

$$\boxed{\cos(t) + 1 = 2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{2}{1 + \tan^2(t/2)}}.$$

- (b) A l'aide du changement de variable $u = \tan(t/2)$, montrons que : $\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + \cos(t)} = 1$. Pour ce faire, on peut remarquer que la fonction $t \mapsto \tan(t/2)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante de $[0, \pi/2]$ dans $[0, 1]$, et donc le changement de variable proposé est licite. De plus, on voit que $du = \frac{1}{2}(1 + \tan^2(t/2))dt$, et donc on a par changement de variables et d'après (6)(b) que :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + \cos(t)} = \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \tan^2(t/2)}{2} dt = \int_0^1 du = 1.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + \cos(t)} = 1}.$$

- (c) Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k I_k = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + \cos(t)} - \int_0^{\pi/2} \frac{(-\cos(t))^{n+1}}{1 + \cos(t)} dt.$$

Par linéarité de l'intégrale et d'après les propriétés des suites géométriques, on trouve que :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n (-1)^k I_k &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^{\pi/2} \cos^k(t) dt \\
 &= \int_0^{\pi/2} \sum_{k=0}^n (-1)^k \cos^k(t) dt \\
 &= \int_0^{\pi/2} \frac{1 - (-\cos(t))^{n+1}}{1 - (-\cos(t))} dt \\
 &= \int_0^{\pi/2} \frac{1 - (-\cos(t))^{n+1}}{1 + \cos(t)} dt \\
 &= \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + \cos(t)} - \int_0^{\pi/2} \frac{(-\cos(t))^{n+1}}{1 + \cos(t)} dt.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k I_k = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + \cos(t)} - \int_0^{\pi/2} \frac{(-\cos(t))^{n+1}}{1 + \cos(t)} dt.$$

(d) Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| \int_0^{\pi/2} \frac{(-\cos(t))^{n+1}}{1 + \cos(t)} dt \right| \leq I_{n+1}.$$

D'après l'inégalité triangulaire pour les intégrales, on trouve que :

$$\left| \int_0^{\pi/2} \frac{(-\cos(t))^{n+1}}{1 + \cos(t)} dt \right| \leq \int_0^{\pi/2} \left| \frac{(-\cos(t))^{n+1}}{1 + \cos(t)} \right| dt.$$

Comme la fonction $\cos$ est positive sur $[0, \pi/2]$, ceci nous donne que :

$$\left| \int_0^{\pi/2} \frac{(-\cos(t))^{n+1}}{1 + \cos(t)} dt \right| \leq \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{n+1}(t)}{1 + \cos(t)} dt.$$

Comme $\cos \geq 0$ sur $[0, \pi/2]$, on voit que $1 + \cos \geq 1$ sur $[0, \pi/2]$, et donc $\frac{\cos^{n+1}(t)}{1 + \cos(t)} \leq \cos^{n+1}(t)$ pour tout $t \in [0, \pi/2]$. Dès lors, il s'ensuit par croissance de l'intégrale que :

$$\left| \int_0^{\pi/2} \frac{(-\cos(t))^{n+1}}{1 + \cos(t)} dt \right| \leq \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1}(t) dt.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| \int_0^{\pi/2} \frac{(-\cos(t))^{n+1}}{1 + \cos(t)} dt \right| \leq I_{n+1}.$$

(e) Montrons que la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n I_n$ converge et déterminons sa somme. D'après la question précédente, on sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \left| \int_0^{\pi/2} \frac{(-\cos(t))^{n+1}}{1 + \cos(t)} dt \right| \leq I_{n+1}.$$

Comme la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ converge vers 0 d'après la question (4)(c), on obtient d'après le théorème d'encadrement que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \int_0^{\pi/2} \frac{(-\cos(t))^{n+1}}{1 + \cos(t)} dt \right| = 0,$$

ce qui revient à écrire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{(-\cos(t))^{n+1}}{1 + \cos(t)} dt = 0$. D'après la question (6)(c), ceci nous donne que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k I_k - \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + \cos(t)} = 0.$$

En particulier, la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n I_n$ converge vers $\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + \cos(t)}$, qui vaut 1 d'après la question (6)(b). Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n \geq 0} (-1)^n I_n \text{ converge et sa somme vaut 1.}}$$

Corrigé de l'exercice 2. Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}.$$

(1) Montrons que, pour tout $x \geq 0$, la série de terme général $f_n(x)$ converge. Soit x un réel positif fixé. Par un calcul simple, on trouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{n+x-n}{n(n+x)} = \frac{x}{n(n+x)}.$$

Dès lors, comme $x \geq 0$, on voit que la série de terme général $f_n(x)$ est à termes positifs. De plus, comme tout polynôme est équivalent en $+\infty$ à son terme de plus haut degré, il s'ensuit que :

$$f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}.$$

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, il s'ensuit que $\sum \frac{x}{n^2}$ converge par linéarité, et donc la série $\sum f_n(x)$ converge d'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs. Par conséquent :

$$\boxed{\text{la série } \sum f_n(x) \text{ converge pour tout } x \in \mathbb{R}_+}.$$

- (2) Calculons $F(0)$ et $F(1)$, où $F(x)$ désigne la somme de $\sum f_n(x)$. Par définition, on voit que :

$$F(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0.$$

De plus, toujours par définition de F , on obtient que :

$$F(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right).$$

On reconnaît alors une somme télescopique. Plus précisément, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Par passage à la limite, il s'ensuit que :

$$F(1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1.$$

Par conséquent, on vient de montrer que :

$$\boxed{F(0) = 0 \text{ et } F(1) = 1.}$$

- (3) Montrons que, pour tout $x \geq 0$, la série de terme général $f'_n(x)$ converge. Soit x un réel positif fixé. Par un calcul simple, on trouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f'_n(x) = \frac{1}{(n+x)^2}.$$

Dès lors, la série de terme général $f'_n(x)$ est à termes positifs. De plus, comme tout polynôme est équivalent en $+\infty$ à son terme de plus haut degré, il s'ensuit que :

$$f'_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, il s'ensuit que la série $\sum f'_n(x)$ converge d'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs. Par conséquent :

$$\boxed{\text{la série } \sum f'_n(x) \text{ converge pour tout } x \in \mathbb{R}_+}.$$

- (4) Dans cette question, on se propose d'étudier la dérivabilité de F . Pour ce faire, on considère la fonction φ définie pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(t) = \frac{1}{t}$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrons que :

$$\forall (x, x_0) \in [n, +\infty[^2, \quad |\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x - x_0)\varphi'(x_0)| \leq \frac{(x - x_0)^2}{n^3}.$$

Pour ce faire, on peut commencer par remarquer que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[n, +\infty[$. De plus, pour tout $x \in [n, +\infty[$, on voit que :

$$|\varphi''(x)| = \left| \frac{2}{x^3} \right| \leq \frac{2}{n^3}.$$

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction φ et à l'ordre 2 sur l'intervalle $I = [n, +\infty[$, on obtient que, pour tout $(x, x_0) \in [n, +\infty[^2$:

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x - x_0)\varphi'(x_0)| \leq \frac{2}{n^3} \times \frac{(x - x_0)^2}{2!}.$$

Dès lors, il s'ensuit après simplification que :

$$\boxed{\forall(x, x_0) \in [n, +\infty[^2, \quad |\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x - x_0)\varphi'(x_0)| \leq \frac{(x - x_0)^2}{n^3}.}$$

- (b) Soient x, h des réels tels que $x \geq 0$, $h \neq 0$ et $x + h \geq 0$. Etudions la nature de la série de terme général $|f_n(x+h) - f_n(x) - hf'_n(x)|$. Tout d'abord, on peut remarquer que cette série est à termes positifs par définition. De plus, par des calculs simples, on voit que $f_n(x) = \varphi(n) - \varphi(n+x)$, $f_n(x+h) = \varphi(n) - \varphi(n+x+h)$ et $f'_n(x) = -\varphi'(x)$, et donc :

$$\begin{aligned} |f_n(x+h) - f_n(x) - hf'_n(x)| &= |\varphi(n) - \varphi(n+x+h) - \varphi(n) + \varphi(n+x) + h\varphi'(x)| \\ &= |-\varphi(n+x+h) + \varphi(n+x) + h\varphi'(x)| \\ &= |\varphi(n+x+h) - \varphi(n+x) - h\varphi'(x)|. \end{aligned}$$

Comme $x \geq 0$, $h \neq 0$ et $x+h \geq 0$, on voit que $n+x+h \geq n$ et $n+x \geq n$, et donc $n+x$ et $n+x+h$ appartiennent bien à $[n, +\infty[$. Dès lors, d'après le résultat de la question précédente et le calcul fait plus haut, il s'ensuit que :

$$|f_n(x+h) - f_n(x) - hf'_n(x)| \leq \frac{(n+x+h-n-x)^2}{n^3} \leq \frac{h^2}{n^3}.$$

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^3}$ converge, il s'ensuit que la série $\sum |f_n(x+h) - f_n(x) - hf'_n(x)|$ converge d'après le critère de comparaison des séries à termes positifs. Par conséquent, pour tout $(x, h) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^*$ tel que $x+h \geq 0$, on voit que :

$$\boxed{\text{la série } \sum |f_n(x+h) - f_n(x) - hf'_n(x)| \text{ converge.}}$$

- (c) Montrons qu'il existe un réel K tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x+h \geq 0$:

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x) \right| \leq K|h|.$$

D'après les étapes de la question précédente et l'inégalité triangulaire, on obtient que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x+h \geq 0$:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n f_k(x+h) - \sum_{k=1}^n f_k(x) - h \sum_{k=1}^n f'_k(x) \right| &= \left| \sum_{k=1}^n (f_k(x+h) - f_k(x) - hf'_k(x)) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |f_k(x+h) - f_k(x) - hf'_k(x)| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \frac{h^2}{k^3} = h^2 \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} \right). \end{aligned}$$

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{k^3}$ converge, ainsi que les séries $\sum f_k(x)$, $\sum f_k(x+h)$, $\sum f'_k(x)$ d'après les questions (1) et (3), on obtient par passage à la limite quand n tend $+\infty$ dans l'inégalité ci-dessus que :

$$\left| \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x+h) - \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) - h \sum_{k=1}^{+\infty} f'_k(x) \right| \leq h^2 \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \right)$$

Posons alors $K = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$. Par définition de F et G , on voit que :

$$|F(x+h) - F(x) - hG(x)| \leq Kh^2.$$

Dès lors, il s'ensuit que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x+h \geq 0$:

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x) \right| = \left| \frac{F(x+h) - F(x) - hG(x)}{h} \right| \leq K \frac{h^2}{|h|}.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x+h \geq 0$:

$$\boxed{\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x) \right| \leq K|h|.}$$

- (d) D'après la question précédente, on sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x+h \geq 0$:

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x) \right| \leq K|h|.$$

Dès lors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $|h| \leq x$, on voit que $x+h \geq 0$, et donc :

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x) \right| \leq K|h|.$$

Comme $K|h|$ tend vers 0 quand h tend vers 0, il s'ensuit que le taux d'accroissement :

$$\Delta(F)(x, h) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

tend vers $G(x)$ quand h tend vers 0. En particulier, la fonction F est dérivable sur $]0, +\infty[$, et de plus $F'(x) = G(x)$ en tout point $x \in]0, +\infty[$. De même, pour tout $h \in \mathbb{R}_+$, on voit que :

$$\left| \frac{F(h) - F(0)}{h} - G(0) \right| \leq K|h|.$$

Comme $K|h|$ tend vers 0 quand h tend vers 0, il s'ensuit que le taux d'accroissement :

$$\Delta(F)(0, h) = \frac{F(h) - F(0)}{h}$$

tend vers $G(0)$ quand h tend vers 0. En particulier, la fonction F est dérivable en 0, et de plus $F'(0) = G(0)$. En résumé, on vient de montrer que :

$$\boxed{\text{la fonction } F \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+ \text{ et } F' = G.}$$

- (5) Dans cette question, on se propose de calculer un équivalent de F en $+\infty$.

- (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrons que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$f_{k+1}(x) \leq \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt \leq f_k(x).$$

Pour ce faire, considérons l'application $\psi : t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}$. Alors ψ est dérivable sur $[k, k+1]$ comme différence de fonctions dérivables sur $[k, k+1]$. De plus, pour tout $t \in [k, k+1]$, on a :

$$\psi'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{(t+x)^2} = \frac{-(t+x)^2 + t^2}{t^2(t+x)^2} = \frac{-x^2 - 2tx}{t^2(t+x)^2} \leq 0.$$

Dès lors, la fonction ψ est décroissante sur $[k, k+1]$ et donc, pour tout $t \in [k, k+1]$:

$$\psi(k+1) \leq \psi(t) \leq \psi(k),$$

ce qui se traduit de la façon suivante. Pour tout $t \in [k, k+1]$, on a :

$$\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1+x} \leq \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}.$$

Par croissance de l'intégrale, il s'ensuit que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1+x} \right) dt \leq \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt \leq \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) dt.$$

Comme les fonctions qui apparaissent dans les intégrales de droite et de gauche ne dépendent pas de t , on obtient que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1+x} \right) (k+1 - k) \leq \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt \leq \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) (k+1 - k).$$

Dès lors, ceci nous donne que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1+x} \leq \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}.$$

Par définition des fonctions $f_l(x)$, on en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{f_{k+1}(x) \leq \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt \leq f_k(x).}$$

(b) Montrons que, pour tout réel $x \geq 0$ et tout entier $n \geq 2$, on a :

$$\int_1^{n+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt \leq \sum_{k=1}^n f_k(x) \leq \frac{x}{x+1} + \int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt.$$

D'après la question précédente, on sait que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt \leq f_k(x)$$

En sommant cette inégalité sur $k \in \{1, \dots, n\}$, on obtient que :

$$\sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt \leq \sum_{k=1}^n f_k(x).$$

D'après la relation de Chasles, il s'ensuit que :

$$\int_1^{n+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt \leq \sum_{k=1}^n f_k(x) \quad (*).$$

Toujours d'après la question précédente, on sait que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$f_{k+1}(x) \leq \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt.$$

En effectuant le changement d'indice $l = k + 1$, on trouve que, pour tout entier $l \geq 2$:

$$f_l(x) \leq \int_{l-1}^l \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt.$$

En sommant cette inégalité sur $l \in \{2, \dots, n\}$, on obtient que :

$$\sum_{l=2}^n f_l(x) \leq \sum_{l=2}^n \int_{l-1}^l \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt.$$

D'après la relation de Chasles, il s'ensuit que :

$$\sum_{l=2}^n f_l(x) \leq \int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt.$$

Comme $f_1(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$, on trouve que :

$$\sum_{l=1}^n f_l(x) \leq \frac{x}{1+x} + \int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt \quad (**).$$

En réunissant les inégalités (*) et (**), on en déduit que, pour tout $x \geq 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\int_1^{n+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt \leq \sum_{k=1}^n f_k(x) \leq \frac{x}{x+1} + \int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt.}$$

(c) Montrons que, pour tout réel $x \geq 0$, on a :

$$\ln(1+x) \leq F(x) \leq \frac{x}{x+1} + \ln(1+x).$$

Par des calculs simples, on trouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt = [\ln(t) - \ln(t+x)]_1^n = \ln\left(\frac{n}{n+x}\right) + \ln(1+x).$$

En particulier, l'encadrement de la question précédente se transforme en :

$$\ln\left(\frac{n+1}{n+1+x}\right) + \ln(1+x) \leq \sum_{k=1}^n f_k(x) \leq \frac{x}{x+1} + \ln\left(\frac{n}{n+x}\right) + \ln(1+x),$$

ce qui se réécrit sous la forme :

$$\ln\left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1+x}{n}}\right) + \ln(1+x) \leq \sum_{k=1}^n f_k(x) \leq \frac{x}{x+1} + \ln\left(\frac{1}{1 + \frac{x}{n}}\right) + \ln(1+x).$$

Comme la série $\sum f_n(x)$ converge, on obtient par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans cet encadrement que :

$$\ln(1) + \ln(1+x) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) \leq \frac{x}{x+1} + \ln(1) + \ln(1+x).$$

Comme $\ln(1) = 0$, on en déduit par définition de F que, pour tout $x \geq 0$:

$$\boxed{\ln(1+x) \leq F(x) \leq \frac{x}{x+1} + \ln(1+x).}$$

- (d) Déterminons un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$. Pour ce faire, on commence par diviser l'encadrement de la question (5)(c) par $\ln(1+x)$, ce qui nous donne pour tout $x > 0$:

$$1 \leq \frac{F(x)}{\ln(1+x)} \leq \frac{x}{(x+1)\ln(1+x)} + 1.$$

En particulier, on obtient par un calcul simple que, pour tout $x > 0$:

$$1 \leq \frac{F(x)}{\ln(1+x)} \leq \frac{1}{(1+\frac{1}{x})\ln(1+x)} + 1.$$

Comme $1/x$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, et que $\ln(1+x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, il s'ensuit que les termes de droite et de gauche de cet encadrement tendent tous deux vers 1 quand x tend vers $+\infty$. D'après le théorème des gendarmes, le terme du milieu tend donc vers 1 en $+\infty$, ce qui entraîne que :

$$F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(1+x).$$

Par des calculs simples, on trouve alors que, pour tout $x > 0$:

$$\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)} = \frac{\ln(x) + \ln(1+\frac{1}{x})}{\ln(x)} = 1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln(x)}$$

Comme $1/x$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, et que $\ln(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, il s'ensuit que ce quotient tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$, et donc :

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x).}$$

Corrigé du problème 1.

- (1) Soit f une fonction définie et strictement positive sur $\mathbb{R}$, telle que $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} x$. Montrons que :

$$\ln(f(x)) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \ln(x).$$

Comme $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} x$, on peut écrire que $f(x) = x + o(x)$, et donc :

$$\ln(f(x)) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} \ln(x + o(x)) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} \ln(x) + \ln(1 + o(1)).$$

En divisant le tout par $\ln(x)$, on obtient que, pour tout $x \in]0, 1[$:

$$\frac{\ln(f(x))}{\ln(x)} \underset{x \rightarrow 0^+}{=} 1 + \frac{\ln(1 + o(1))}{\ln(x)}.$$

Comme la fonction " $o(1)$ " tend vers 0 quand x tend vers 0^+ et que la fonction $\ln$ est continue en 1 et y vaut 0, on obtient par composition des limites que la fonction " $\ln(1 + o(1))$ " tend vers 0 quand x tend vers 0^+ . Mais comme la fonction $\ln$ tend vers $-\infty$ en 0^+ , il s'ensuit que :

$$\frac{\ln(f(x))}{\ln(x)} \underset{x \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} 1.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\ln(f(x)) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \ln(x).}$$

Partie 1 : deux nouvelles fonctions

On définit les fonctions, appelées "sinus hyperbolique" et "cosinus hyperbolique", notées respectivement sh et ch en posant pour tout réel x :

$$\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- (1) (a) Etudions la parité de la fonction sh. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on trouve que :

$$\text{sh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = -\text{sh}(x).$$

Par conséquent, on en déduit que :

la fonction sh est impaire.

- (b) Dressons le tableau de variations de la fonction sh (avec les limites aux bornes). Tout d'abord, on peut remarquer que la fonction sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus, comme l'exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{sh}'(x) = \frac{e^x - (-1)e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{ch}(x) > 0.$$

En particulier, la fonction sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, comme l'exponentielle tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers 0 en $-\infty$, on voit que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sh}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty.$$

En outre, comme la fonction sh est impaire d'après la question précédente, on obtient que :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{sh}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\infty.$$

Par conséquent, on en déduit le tableau de variations suivant pour sh :

x	$-\infty$	$+\infty$
$\text{sh}'(x)$		+
sh	$-\infty$	$+\infty$

- (c) Déterminons un équivalent en 0 de sh(x). D'après les développements limités classiques, on sait que $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x)$. Comme $-x$ tend vers 0 quand x tend vers 0, on a par substitution que :

$$e^{-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + o((-x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + o(x).$$

Dès lors, il s'ensuit que :

$$\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1 + x + o(x) - 1 + x + o(x)}{2} = x + o(x).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\text{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$$

- (2) (a) Etudions la parité de la fonction ch. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on trouve que :

$$\text{ch}(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{ch}(x).$$

Par conséquent, on en déduit que :

la fonction ch est paire.

- (b) Dressons le tableau de variations de la fonction ch (avec les limites aux bornes). Tout d'abord, on peut remarquer que la fonction ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et de plus, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{ch}'(x) = \frac{e^x + (-1)e^{-x}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{sh}(x).$$

D'après la question (1)(b) de la partie 1, la fonction sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $\text{sh}(0) = \frac{e^0 - e^{-0}}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$, la fonction sh est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement

négative sur $\mathbb{R}_-^*$. En particulier, la fonction ch est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$. De plus, comme l'exponentielle tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers 0 en $-\infty$, on voit que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{ch}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = +\infty.$$

En outre, comme la fonction ch est impaire d'après la question précédente, on obtient que :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{ch}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = +\infty.$$

Par conséquent, on en déduit le tableau de variations suivant pour ch :

x	$-\infty$			$+\infty$
$\text{ch}'(x)$		-	0	+
ch	$+\infty$	$\searrow$	$\downarrow$ 1	$\nearrow$ $+\infty$

(3) Montrons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$. Par des calculs simples, on trouve que :

$$\begin{aligned} \text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2e^{x-x}}{4} - \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2e^{x-x}}{4} \\ &= \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} - \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} \\ &= \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2 - e^{2x} - e^{-2x} + 2}{4} \\ &= \frac{4}{4} = 1. \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1.}$$

Partie 2 : une troisième fonction

(1) (a) Montrons que l'on définit bien une fonction, appelée "tangente hyperbolique" et notée th , en posant pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}.$$

Comme les fonctions sh et ch sont bien définies sur $\mathbb{R}$, il suffit, au vu de la fonction th , de vérifier que la fonction ch ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Or, on voit d'après la question (2)(b) de la partie 1 que la fonction ch admet un minimum en $x = 0$, qui vaut 1. En particulier, on constate que $\text{ch}(x) \geq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et donc la fonction ch ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction th est bien définie sur } \mathbb{R}.}$$

(b) Vérifions que la fonction th est impaire. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on trouve avec les questions (1)(a) et (2)(a) de la partie 1 que :

$$\text{th}(-x) = \frac{\text{sh}(-x)}{\text{ch}(-x)} = \frac{-\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} = -\text{th}(x).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction th est impaire.}}$$

(c) Déterminer les variations de la fonction th . Tout d'abord, on peut remarquer que la fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. De plus, comme $\text{ch}' = \text{sh}$ et $\text{sh}' = \text{ch}$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{th}'(x) = \left(\frac{\text{sh}}{\text{ch}} \right)'(x) = \frac{\text{sh}'(x)\text{ch}(x) - \text{ch}'(x)\text{sh}(x)}{\text{ch}^2(x)}.$$

En particulier, ceci nous donne avec la question (3) de la partie 1 que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{th}'(x) = \frac{\text{ch}(x)\text{ch}(x) - \text{sh}(x)\text{sh}(x)}{\text{ch}^2(x)} = \frac{\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x)}{\text{ch}^2(x)} = \frac{1}{\text{ch}^2(x)} > 0.$$

Par conséquent, on en déduit que :

la fonction th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- (d) Dressons le tableau de variations de la fonction th (avec les limites aux bornes). D'après la question précédente, on sait déjà que la fonction th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Reste donc à déterminer ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$. Comme l'exponentielle tend vers 0 en $-\infty$, on obtient par quotient des limites que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{th}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1.$$

En outre, comme la fonction th est impaire d'après la question (1)(b) de la partie 2, on a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{th}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{th}(-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\text{th}(x) = -1.$$

Par conséquent, on en déduit le tableau de variations suivant pour th :

x	$-\infty$	$+\infty$
$\text{th}'(x)$	+	
th	-1	1

- (2) (a) Trouvons des constantes a, b telles que, pour tout $x > 0$:

$$\frac{1}{\text{sh}(x)} = \frac{ae^{-x}}{1 - e^{-x}} + \frac{be^{-x}}{1 + e^{-x}}.$$

Par des calculs simples, on trouve que, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} + \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} &= e^{-x} \left(\frac{1}{1 - e^{-x}} + \frac{1}{1 + e^{-x}} \right) \\ &= e^{-x} \left(\frac{1 + e^{-x}}{(1 - e^{-x})(1 + e^{-x})} + \frac{1 - e^{-x}}{(1 + e^{-x})(1 - e^{-x})} \right) \\ &= e^{-x} \left(\frac{1 + e^{-x} + 1 - e^{-x}}{(1 - e^{-x})(1 + e^{-x})} \right) \\ &= e^{-x} \left(\frac{2}{(1 - e^{-x})(1 + e^{-x})} \right) \\ &= \frac{2e^{-x}}{1^2 - e^{-2x}} \\ &= \frac{2}{e^x(1 - e^{-2x})} \\ &= \frac{2}{e^x - e^{-x}} \\ &= \frac{1}{\text{sh}(x)}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit qu'on peut choisir :

$$a = b = 1.$$

- (b) Déterminons une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $h : x \mapsto \frac{1}{\text{sh}(x)}$. D'après la question précédente, on sait que, pour tout $x > 0$:

$$\frac{1}{\text{sh}(x)} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} + \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}.$$

Comme $(\ln(u))' = u'/u$, pour toute fonction u dérivable strictement positive, on obtient que la fonction h admet pour primitive la fonction :

$$H : x \mapsto \ln(1 - e^{-x}) - \ln(1 + e^{-x}).$$

A noter que, pour tout $x > 0$, on a :

$$H(x) = \ln\left(\frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}\right) = \ln\left(\frac{e^{x/2}(1 - e^{-x})}{e^{x/2}(1 + e^{-x})}\right) = \ln\left(\frac{e^{x/2} - e^{-x/2}}{e^{x/2} + e^{-x/2}}\right) = \ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right).$$

Par conséquent, on en déduit qu'une primitive de la fonction $h : x \mapsto \frac{1}{\operatorname{sh}(x)}$ est donnée par :

$$\boxed{H : x \mapsto \ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right)}.$$

(3) Montrons que $\ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \ln(x)$. Par définition, on sait que, pour tout $x > 0$:

$$\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Comme la fonction ch est continue en 0 et que $\operatorname{ch}(0) = 1$, on voit que $\operatorname{ch}(x/2)$ tend vers 1 quand x tend vers 0 par composition des limites, et donc :

$$\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1.$$

De plus, comme $\operatorname{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ d'après la question (1)(c) de la partie 1 et que $x/2$ tend vers 0 quand x tend vers 0, on obtient par substitution que :

$$\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2}.$$

Par quotient, ceci entraîne que :

$$\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2}.$$

D'après la question 1 des préliminaires, ceci nous donne que :

$$\ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \ln(x) - \ln(2).$$

Par ailleurs, comme la fonction $\ln$ tend vers $-\infty$ en 0^+ , on trouve que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x) - \ln(2)}{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - \frac{\ln(2)}{\ln(x)} = 1 - 0 = 1.$$

En particulier, il s'ensuit que :

$$\ln(x) - \ln(2) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \ln(x).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \ln(x)}.$$

Partie 3 : une série convergente

Dans cette partie, on désigne par x un réel strictement positif.

(1) (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrons que :

$$\frac{1}{\operatorname{sh}((k+1)x)} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{\operatorname{sh}(tx)} dt \leq \frac{1}{\operatorname{sh}(kx)}.$$

Pour ce faire, fixons un réel $x > 0$. Alors la fonction $t \mapsto tx$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme la fonction sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ d'après la question (1)(b) de la partie 1, leur composée $t \mapsto \operatorname{sh}(tx)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}_+^*$. Par passage à l'inverse, la fonction $t \mapsto \frac{1}{\operatorname{sh}(tx)}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Dès lors, on voit que, pour tout $t \in [k, k+1]$:

$$\frac{1}{\operatorname{sh}((k+1)x)} \leq \frac{1}{\operatorname{sh}(tx)} \leq \frac{1}{\operatorname{sh}(kx)}.$$

Par croissance de l'intégrale (les bornes étant dans l'ordre croissant), on obtient que :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{\text{sh}((k+1)x)} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{\text{sh}(tx)} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{\text{sh}(kx)} dt.$$

En particulier, ceci nous donne que :

$$(k+1-k) \frac{1}{\text{sh}((k+1)x)} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{\text{sh}(tx)} dt \leq (k+1-k) \int_k^{k+1} \frac{1}{\text{sh}(kx)} dt.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\frac{1}{\text{sh}((k+1)x)} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{\text{sh}(tx)} dt \leq \frac{1}{\text{sh}(kx)}}.$$

(b) Déterminons l'encadrement suivant, valable pour tout entier $n \geq 2$:

$$\int_1^n \frac{1}{\text{sh}(tx)} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\text{sh}(kx)} \leq \int_1^n \frac{1}{\text{sh}(tx)} dt + \frac{1}{\text{sh}(x)}.$$

D'après la question précédente, on sait que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{\text{sh}((k+1)x)} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{\text{sh}(tx)} dt \leq \frac{1}{\text{sh}(kx)}.$$

En sommant sur l'entier k depuis $k=1$ jusqu'à $k=n-1$, on obtient que, pour tout $n \geq 2$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\text{sh}((k+1)x)} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{\text{sh}(tx)} dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\text{sh}(kx)}.$$

D'après la relation de Chasles, ceci nous donne que, pour tout $n \geq 2$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\text{sh}((k+1)x)} \leq \int_1^n \frac{1}{\text{sh}(tx)} dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\text{sh}(kx)}.$$

En effectuant le changement d'indice $l = k+1$ dans la somme de gauche ci-dessus, on obtient que, pour tout $n \geq 2$:

$$\sum_{l=2}^n \frac{1}{\text{sh}(lx)} \leq \int_1^n \frac{1}{\text{sh}(tx)} dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\text{sh}(kx)}.$$

A noter que cet encadrement peut se réécrire de la façon suivante :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\text{sh}(kx)} - \frac{1}{\text{sh}(x)} \leq \int_1^n \frac{1}{\text{sh}(tx)} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\text{sh}(kx)} - \frac{1}{\text{sh}(nx)}.$$

En particulier, cet encadrement donne lieu à deux inégalités, à savoir :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\text{sh}(kx)} - \frac{1}{\text{sh}(x)} \leq \int_1^n \frac{1}{\text{sh}(tx)} dt \quad \text{et} \quad \int_1^n \frac{1}{\text{sh}(tx)} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\text{sh}(kx)} - \frac{1}{\text{sh}(nx)},$$

lesquelles pouvant se réécrire sous la forme suivante :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\text{sh}(kx)} \leq \int_1^n \frac{1}{\text{sh}(tx)} dt + \frac{1}{\text{sh}(x)} \quad \text{et} \quad \int_1^n \frac{1}{\text{sh}(tx)} dt + \frac{1}{\text{sh}(nx)} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\text{sh}(kx)}.$$

En rassemblant le tout, il s'ensuit que :

$$\int_1^n \frac{1}{\text{sh}(tx)} dt + \frac{1}{\text{sh}(nx)} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\text{sh}(kx)} \leq \int_1^n \frac{1}{\text{sh}(tx)} dt + \frac{1}{\text{sh}(x)}.$$

Mais comme $x > 0$ par hypothèse, on voit que $\frac{1}{\text{sh}(nx)} \geq 0$, et donc :

$$\int_1^n \frac{1}{\text{sh}(tx)} dt \leq \int_1^n \frac{1}{\text{sh}(tx)} dt + \frac{1}{\text{sh}(nx)} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\text{sh}(kx)} \leq \int_1^n \frac{1}{\text{sh}(tx)} dt + \frac{1}{\text{sh}(x)}.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout entier $n \geq 2$:

$$\boxed{\int_1^n \frac{1}{\text{sh}(tx)} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\text{sh}(kx)} \leq \int_1^n \frac{1}{\text{sh}(tx)} dt + \frac{1}{\text{sh}(x)}}.$$

- (2) (a) Montrons que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\text{sh}(nx)}$ est convergente. Pour ce faire, on part du fait que, d'après la question précédente, on a pour tout $n \geq 2$:

$$\int_1^n \frac{1}{\text{sh}(tx)} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\text{sh}(kx)} \leq \int_1^n \frac{1}{\text{sh}(tx)} dt + \frac{1}{\text{sh}(x)}. \quad (*)$$

Posons alors $u = tx$. Alors ce changement de variable est licite car affine et de plus, on a $du = xdt$, $u = x$ si $t = 1$ et $u = nx$ si $t = n$. Par changement de variable et par linéarité de l'intégrale, on trouve que :

$$\int_1^n \frac{1}{\text{sh}(tx)} dt = \int_x^{nx} \frac{1}{\text{sh}(u)} \frac{du}{x} = \frac{1}{x} \int_x^{nx} \frac{du}{\text{sh}(u)}.$$

D'après la question (2)(b) de la partie 2, on obtient que :

$$\int_1^n \frac{1}{\text{sh}(tx)} dt = \frac{1}{x} \left[\ln \left(\text{th} \left(\frac{u}{2} \right) \right) \right]_x^{nx} = \frac{1}{x} \left(\ln \left(\text{th} \left(\frac{nx}{2} \right) \right) - \ln \left(\text{th} \left(\frac{x}{2} \right) \right) \right).$$

D'après la question (1)(d) de la partie 2, on voit que la fonction th est majorée par 1, ce qui entraîne que $\ln \left(\text{th} \left(\frac{nx}{2} \right) \right) \leq 0$ pour tout $n \geq 2$. Dès lors, il s'ensuit que, pour tout $n \geq 2$:

$$\int_1^n \frac{1}{\text{sh}(tx)} dt \leq -\frac{1}{x} \ln \left(\text{th} \left(\frac{x}{2} \right) \right),$$

et ceci entraîne avec l'encadrement (*) que, pour tout $n \geq 2$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\text{sh}(kx)} \leq -\frac{1}{x} \ln \left(\text{th} \left(\frac{x}{2} \right) \right) + \frac{1}{\text{sh}(x)}.$$

En particulier, la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\text{sh}(nx)}$ est majorée. Mais comme $x > 0$ et que la fonction sh est > 0 sur $\mathbb{R}_+^*$, cette série est à termes positifs. Par conséquent, on en déduit que :

la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\text{sh}(nx)}$ converge.

- (b) Etablir, pour tout $x > 0$, l'encadrement suivant :

$$-\frac{1}{x} \ln \left(\text{th} \left(\frac{x}{2} \right) \right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\text{sh}(kx)} \leq -\frac{1}{x} \ln \left(\text{th} \left(\frac{x}{2} \right) \right) + \frac{1}{\text{sh}(x)}.$$

D'après la question (1)(b) de la partie 3, on a pour tout $n \geq 2$:

$$\int_1^n \frac{1}{\text{sh}(tx)} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\text{sh}(kx)} \leq \int_1^n \frac{1}{\text{sh}(tx)} dt + \frac{1}{\text{sh}(x)}. \quad (*)$$

De plus, d'après la question précédente, on sait aussi que, pour tout $n \geq 2$:

$$\int_1^n \frac{1}{\text{sh}(tx)} dt = \frac{1}{x} \left(\ln \left(\text{th} \left(\frac{nx}{2} \right) \right) - \ln \left(\text{th} \left(\frac{x}{2} \right) \right) \right).$$

En particulier, ceci nous donne l'encadrement suivant pour tout $n \geq 2$:

$$\frac{1}{x} \left(\ln \left(\text{th} \left(\frac{nx}{2} \right) \right) - \ln \left(\text{th} \left(\frac{x}{2} \right) \right) \right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\text{sh}(kx)} \leq \frac{1}{x} \left(\ln \left(\text{th} \left(\frac{nx}{2} \right) \right) - \ln \left(\text{th} \left(\frac{x}{2} \right) \right) \right) + \frac{1}{\text{sh}(x)}. \quad (**)$$

Comme la fonction th tend vers 1 en $+\infty$ d'après la question (1)(d) de la partie 2, que $x > 0$ par hypothèse et que la fonction $\ln$ est continue en 1, ceci entraîne par composition des limites que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(\text{th} \left(\frac{nx}{2} \right) \right) = \ln(1) = 0.$$

Mais comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\text{sh}(nx)}$ converge d'après la question précédente, on en déduit par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'encadrement (**) que :

$$-\frac{1}{x} \ln \left(\text{th} \left(\frac{x}{2} \right) \right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\text{sh}(kx)} \leq -\frac{1}{x} \ln \left(\text{th} \left(\frac{x}{2} \right) \right) + \frac{1}{\text{sh}(x)}.$$

(c) Montrons que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\text{sh}(kx)} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\frac{\ln(x)}{x}.$$

D'après l'encadrement de la question précédente, on sait que, pour tout $x > 0$:

$$-\frac{1}{x} \ln \left(\text{th} \left(\frac{x}{2} \right) \right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\text{sh}(kx)} \leq -\frac{1}{x} \ln \left(\text{th} \left(\frac{x}{2} \right) \right) + \frac{1}{\text{sh}(x)}.$$

En divisant le tout par $-\frac{\ln(x)}{x}$ (qui est > 0 si $x \in]0, 1[$), on a pour tout $x \in]0, 1[$:

$$\frac{1}{\ln(x)} \ln \left(\text{th} \left(\frac{x}{2} \right) \right) \leq \frac{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\text{sh}(kx)}}{-\frac{\ln(x)}{x}} \leq \frac{1}{\ln(x)} \ln \left(\text{th} \left(\frac{x}{2} \right) \right) - \frac{x}{\ln(x)\text{sh}(x)}. \quad (*)$$

D'après la question (3) de la partie 2, on sait déjà que :

$$\ln \left(\text{th} \left(\frac{x}{2} \right) \right) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \ln(x).$$

En particulier, ceci nous donne que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln(x)} \ln \left(\text{th} \left(\frac{x}{2} \right) \right) = 1.$$

De plus, comme $\text{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} x$ d'après la question (1)(c) de la partie 1, on voit que :

$$\frac{x}{\ln(x)\text{sh}(x)} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\ln(x)}.$$

En particulier, comme la fonction $\ln$ tend vers $-\infty$ en 0^+ , ceci nous donne que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln(x)\text{sh}(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln(x)} = 0.$$

D'après le théorème d'encadrement appliqué à (*), il s'ensuit que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\text{sh}(kx)}}{-\frac{\ln(x)}{x}} = 1.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\text{sh}(kx)} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\frac{\ln(x)}{x}.}$$