## TRAVAUX DIRIGÉS : ESPACES PROBABILISÉS

**Exercice 1.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $n$ boules numérotées de 1 à $n$. On place au hasard les $n$ boules dans $n$ boîtes, chaque boîte pouvant contenir de 0 à $n$ boules. Quelle est la probabilité que chaque boîte contienne exactement une boule?

**Exercice 2.** Une urne contient $p$ boules blanches et $q$ boules noires, avec $p, q \geq 3$. On tire alors 3 boules de cette urne successivement et sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir successivement une boule blanche, puis une boule noire, et enfin une boule blanche?

**Exercice 3.** On dispose de deux urnes $U_1$ et $U_2$, ainsi que d'une pièce équilibrée. On suppose que l'urne $U_1$ contient 1 boule blanche et 2 boules noires, que l'urne $U_2$ contient 1 boule blanche et 3 boules noires. On lance alors la pièce. Si le résultat est pile, alors on tire une boule de l'urne $U_1$, sinon on en tire une de l'urne $U_2$.

(1) Quelle est la probabilité d'avoir tiré une boule blanche?
(2) On suppose qu'on a tiré une boule blanche. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu face?

**Exercice 4.** Une personne doit ouvrir une porte. Elle dispose pour cela d'un trousseau de 15 clés contenant la clé qui ouvre cette porte. Elle essaie les clés au hasard et l'une après l'autre. Quelle est la probabilité d'ouvrir la porte au $k$-ème essai ($k \in \{1, ..., 15\}$)?

**Exercice 5.** On répartit au hasard 4 boules distinctes dans 3 boîtes numérotées de 1 à 3.

(1) Quelle est la probabilité que la première boîte soit vide?
(2) Quelle est la probabilité que la première boîte ou la deuxième boîte soit vide?

**Exercice 6.** Soit $(a, b) \in ]0, 1[^2$. Le fonctionnement d'un appareil au cours du temps obéit aux règles suivantes :

- si l'appareil fonctionne à la date $n-1$ ($n \in \mathbb{N}^*$), il a la probabilité $a$ de fonctionner à la date $n$,
- si l'appareil est en panne à la date $n-1$ ($n \in \mathbb{N}^*$), il a la probabilité $b$ d'être en panne à la date $n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $M_n$ l'événement "l'appareil fonctionne à la date $n$" et $p_n$ la probabilité de $M_n$. Enfin, on suppose que l'appareil fonctionne à la date 0.

(1) Etablir une relation entre $p_n$ et $p_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
(2) En déduire l'expression de $p_n$ en fonction de $n, a, b$.
(3) Quelle est la probabilité que l'appareil ne tombe jamais en panne?

**Exercice 7.** On lance simultanément deux dés jusqu'à ce qu'une somme de 5 ou 7 apparaisse. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $E_n$ l'événement "une somme de 5 apparaît au $n$-ème lancer et sur les $(n-1)$ premiers lancers, ni la somme de 5 ni celle de 7 n'apparaît".

(1) Calculer la probabilité $P(E_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
(2) Trouver la probabilité que le jeu s'arrête sur une somme de 5.
(3) Trouver la probabilité que le jeu s'arrête sur une somme de 7.
(4) Quelle est la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais?

**Exercice 8.** On lance $n$ dés. Quelle est la probabilité de l'événement $A_n$ : " le total des numéros est pair"?

**Exercice 9.** Une urne contient 3 boules rouges et 7 boules noires. Deux joueurs $A$ et $B$ tirent à tour de rôle une boule sans la remettre dans l'urne, jusqu'à ce qu'une boule rouge sorte. C'est le joueur $A$ qui commence le jeu. Trouver la probabilité que $A$ tire une boule rouge le premier.

**Exercice 10. (Inégalité de Boole)**

(1) Montrer que, pour tous événements $A_1, ..., A_n$, on a : $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.
(2) En déduire que, si $A, B, C$ sont trois événements équiprobables, de même probabilité $p$ et si l'on a $P(A \cap B \cap C) = 0$, alors $p \leq \frac{2}{3}$.

**Exercice 11.** On dispose de 10 pièces de monnaie numérotées de 1 à 10, telles que la $k$-ème pièce amène "pile" avec la probabilité $\frac{k}{10}$. On prend une pièce au hasard, on la lance et on obtient "face". Quelle est la probabilité d'avoir choisi la 5-ème pièce?

**Exercice 12.** On lance une pièce équilibrée.

(1) On suppose que l'on lance la pièce $n$ fois, avec $n \geq 2$. Calculer les probabilités des événements $A_n$ : "on obtient au plus une fois pile" et $B_n$ : "les résultats des différents lancers ne sont pas tous identiques". Les événements $A_n$ et $B_n$ sont-ils indépendants? Justifier.

(2) Cette fois-ci, on lance indéfiniment la pièce. Calculer les probabilités des événements $A$ : "on obtient au plus une fois pile" et $B$ : "les résultats des différents lancers ne sont pas tous identiques". Les événements $A$ et $B$ sont-ils indépendants? Justifier.

**Exercice 13.** On considère une infinité d'urnes. On suppose que, pour tout $k \geq 1$, l'urne $n^o k$ contient $2^k$ boules dont une seule blanche et les autres noires, et que la probabilité de choisir la $k$-ème urne est égale à $\frac{1}{2^k}$. On choisit au hasard une urne, puis on en tire une boule. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche?

**Exercice 14.** Un enfant lance des galets pour faire des ricochets dans l'eau. On suppose que, si le galet a effectué $(n-1)$ premiers ricochets, alors il ricoche pour la $n$-ème fois avec probabilité $\frac{1}{n}$ (sinon il coule).

(1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité $p_n$ que le galet coule après $n$ ricochets.

(2) Calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n$. Interprétation?

**Exercice 15. (Lemme de Borel-Cantelli - ESCP 2012)**

(1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $1 - x \leq e^{-x}$.

(2) On dispose d'une urne vide au départ. Le premier jour, une personne met une boule numérotée 1 dans l'urne, la tire, note son numéro et la remet dans l'urne (!). Ensuite, à chaque nouvelle journée, elle ajoute une boule qui porte le numéro du jour considéré, elle tire alors une boule au hasard, note le numéro de cette boule et la remet dans l'urne. Le processus se poursuit indéfiniment...

(a) Montrer que, pour tout $l \in \mathbb{N}^*$ et toute famille d'événements indépendants $(E_1, ..., E_l)$, on a :

$$P\left(\bigcap_{1\leq i\leq l} \overline{E_i}\right) \leq e^{-\sum_{i=1}^{l} P(E_i)}.$$

(b) Déterminer la probabilité de l'événement $A_k$ :"la boule numérotée 10 sort lors du $k$-ème tirage".

(c) Quelle est la probabilité que la boule 10 sorte au moins une fois à partir du $n$-ème tirage?

(d) Quelle est la probabilité que la boule 10 sorte une infinité de fois?

(e) Calculer la probabilité que la boule 10 sorte une infinité de fois de suite.

(3) On suppose cette fois que la personne remplit l'urne de sorte qu'il y ait dans l'urne $n^2$ boules, numérotées de 1 à $n^2$, le $n$-ème jour (elle met donc une boule numérotée 1 le premier jour, trois boules numérotées $2, 3, 4$ le deuxième jour, cinq boules le troisième, etc). Comme à la question précédente, elle tire alors une boule, note son numéro et la remet immédiatement dans l'urne.

(a) Montrer que, pour tout $l \in \mathbb{N}^*$ et toute famille d'événements $(E_1, ..., E_l)$, on a :

$$P\left(\bigcup_{1\leq i\leq l} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{l} P(E_i).$$

(b) Quelle est la probabilité que le numéro 10 sorte une infinité de fois?

**Exercice 16. (QSP HEC 2013)** On lance une pièce de monnaie équilibrée $n$ fois de suite de manière indépendante, et on s'intéresse à l'événement $E_n$ : "au cours des $n$ lancers, deux piles successifs n'apparaissent pas". Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $p_n$ la probabilité de l'événement $E_n$.

(1) Trouver une relation entre $p_n, p_{n+1}, p_{n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(2) Montrer que la suite $(p_n)$ tend vers 0.

**Exercice 17. (QSP ESCP 2023)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance $2n+1$ fois une pièce équilibrée. Pour tout $k \in [\![1, 2n+1]\!]$, on pose $A_k$ : "le lancer $k$ a donné pile et on a obtenu $n+1$ piles à l'issue des $k$ premiers lancers".

(1) Calculer $P(A_k)$ pour tout $k \in [\![1, 2n+1]\!]$.

(2) En déduire que $\sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{2^k}\binom{k-1}{n} = \frac{1}{2}$.

## 1. Exercices supplémentaires

**Exercice 18.** Une urne $U$ contient 5 boules blanches et 2 noires. Une deuxième urne $V$ contient 6 boules blanches et 3 noires. Les boules sont indiscernables au toucher. On choisit au hasard, successivement et avec remise, 2 boules dans chacune des urnes et on en note les couleurs.

(1) Quelle est la probabilité que les 4 boules choisies soient de la même couleur?
(2) Quelle est la probabilité d'obtenir 2 boules blanches et 2 boules noires?

**Exercice 19.** On dispose de 5 pièces de monnaie dont l'une possède 2 faces. On choisit une des pièces au hasard et on la lance $n$ fois.

(1) Quelle est la probabilité d'obtenir face au premier lancer?
(2) On a obtenu face au premier lancer. Quelle est la probabilité d'avoir choisi la pièce truquée?
(3) Quelle est la probabilité de n'obtenir que des faces aux $n$ lancers?
(4) On a obtenu $n$ faces aux $n$ lancers. Quelle est la probabilité $p_n$ d'avoir choisi la pièce truquée?
(5) Déterminer la limite de $p_n$ lorsque $n$ tend vers l'infini.

**Exercice 20.** Dans une population, un sujet sur 100 est atteint par une maladie. Il existe un test de dépistage de cette maladie dont la fiabilité n'est pas totale : 90 pour cent des sujets atteints sont testés positivement, et 95 pour cent des sujets sains sont testés négativement. Calculer la probabilité qu'un sujet dont le test est négatif soit atteint par la maladie.

**Exercice 21.** On cherche un document dont on pense qu'il est dans un classeur à 5 tiroirs avec la probabilité $p$. On a cherché dans les 4 premiers tiroirs mais on ne l'a pas trouvé. Probabilité qu'il se trouve dans le dernier?

**Exercice 22.** Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 3. On considère $n$ personnes qui lancent chacune une pièce de monnaie. Si une seule personne obtient pile (resp. face) alors que les autres obtiennent face (resp. pile), elle est déclarée perdante et va chercher des rafraîchissements.

(1) Quelle est la probabilité d'obtenir un perdant lors de cette expérience?
(2) Quelle est la probabilité d'obtenir le premier perdant à la $i$-ème expérience?

**Exercice 23.** Un mobile se déplace aléatoirement dans l'ensemble des sommets d'un triangle $ABC$. Si, à l'étape $n$, il est sur un sommet, alors à l'étape suivante $n+1$, il peut soit rester sur le même sommet avec la probabilité $2/3$, soit se placer sur l'un des 2 autres sommets avec la même probabilité. On désigne par $A_n$ (resp. $B_n$ et $C_n$) l'événement "Le mobile se trouve en $A$ (resp. $B$ et $C$) à l'étape $n$", et par $a_n$ (resp. $b_n$ et $c_n$) sa probabilité.

(1) Quelle relation simple lie les nombres $a_n, b_n, c_n$?
(2) Exprimer $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ en fonction de $a_n, b_n, c_n$.
(3) En déduire que les suites $(u_n) = (a_n - b_n)$ et $(v_n) = (a_n - c_n)$ sont géométriques.
(4) On suppose que le mobile se trouve en $A$ à l'étape 0. Calculer $a_n, b_n, c_n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 24.** On lance indéfiniment une pièce équilibrée.

(1) Calculer la probabilité de l'événement $A_n$ : "on obtient au moins une fois pile lors des $n$ premiers lancers".
(2) En déduire que la probabilité de l'événement $A$ : "on obtient au moins un pile au cours de cette infinité de lancers" est égale à 1.

**Exercice 25.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance indéfiniment une pièce truquée, dont la probabilité de faire face à chaque lancer est égale à $p$ (où $p \in ]0,1[$). On note alors $P$ pour pile et $F$ pour face.

(1) Calculer la probabilité de $A_n$ : "la séquence $PF$ apparait pour la première fois aux lancers $n-1$ et $n$".
(2) Calculer la probabilité de $A$ : "la séquence $PF$ apparait au moins une fois".
(3) Calculer la probabilité de $B$ : "la séquence $PP$ apparait sans qu'il y ait eu de séquence $PF$ avant".

**Exercice 26.** Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, soit $p \in ]0,1[$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que la probabilité qu'une famille ait exactement $n$ enfants est égale à $p_n = \alpha p^n$, et que les distributions de sexes sont équiprobables dans une fratrie.

(1) Etablir l'inégalité : $1 + \alpha \leq \frac{1}{p}$.
(2) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité qu'une famille ait exactement $N$ filles (*indication : utiliser la formule des probabilités totales et la formule du binôme négatif*).

**Exercice 27.** On dispose de deux pièces. L'une des pièces est équilibrée, et l'autre, faussée, permet d'obtenir "face" avec une probabilité de 2/3. Malheureusement, on ne sait plus quelle est la pièce truquée. On dispose alors de deux stratégies :

(1) On lance une pièce. Si le résultat est "face", on continue à jouer avec cette pièce. Sinon, on joue avec l'autre et on ne change plus de pièce. Soit $F_n$ l'événement "on obtient "face" au $n$-ème lancer" et soit $E$ l'événement "on joue avec la pièce équilibrée après le premier lancer".
   (a) Quelle est la probabilité de jouer avec la pièce équilibrée après le premier lancer?
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir "face" au $n$-ème lancer?
   (c) Calculer la limite de $P(F_n)$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

(2) On lance une pièce. Si le résultat est "face", on rejoue avec la même pièce. Si le résultat est "pile", on change de pièce. Mais désormais, on procède ainsi à chaque tirage. Soit $F_n$ l'événement "on obtient "face" au $n$-ème lancer" et soit $T_n$ l'événement "on joue avec la pièce truquée au $n$-ème lancer".
   (a) Calculer $P(T_{n+1})$ en fonction de $P(T_n)$ pour tout $n \geq 1$.
   (b) En déduire l'expression de $P(T_n)$ en fonction de $n$.
   (c) Quelle est la probabilité d'obtenir "face" au $n$-ème lancer?
   (d) Calculer la limite de $P(F_n)$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

(3) Quelle est la meilleure stratégie à long terme pour avoir le plus de chances d'obtenir "face"?

**Exercice 28. (ESCP 2014)** On considère une suite indéfinie de lancers d'une pièce équilibrée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $R_n$ l'événement "pile apparaît au $n$-ème lancer" et par $S_n$ l'événement "face apparaît au $n$-ème lancer". On suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Par la suite, on pose pour tout $n \geq 3$ :

$$B_n = R_{n-2} \cap R_{n-1} \cap S_n \quad \text{et} \quad U_n = \bigcup_{i=3}^{n} B_i.$$

Enfin, on pose $u_1 = u_2 = 0$ et pour tout $n \geq 3$ : $u_n = P(U_n)$.

(1) Montrer que la suite $(u_n)$ est monotone et convergente.

(2) (a) Calculer $P(B_n)$ pour tout $n \geq 3$.
   (b) Montrer que, pour tout $n \geq 3$, les événements $B_n, B_{n+1}, B_{n+2}$ sont deux à deux incompatibles.
   (c) Calculer les valeurs de $u_3, u_4, u_5$.

(3) Dans cette question, on suppose que $n \geq 5$.
   (a) Comparer les événements $U_n \cap B_{n+1}$ et $U_{n-2} \cap B_{n+1}$ et donner leurs probabilités respectives.
   (b) Montrer que, pour tout $n \geq 3$, on a :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}).$$

   (c) Déterminer la limite $l$ de la suite $(u_n)$.

(4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = 1 - u_n$.
   (a) Trouver $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \beta v_{n+2} + \gamma v_{n+3}$.
   (b) Montrer que la série $\sum v_n$ converge et calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ (*indication : sommer la relation de la question* (4)(*a*)).

**Exercice 29. (ESCP 2022)**

(1) Soit $k \in \mathbb{N}$ un entier fixé.
   (a) Déterminer un équivalent de $\binom{n}{k}$ quand $n$ tend vers $+\infty$.
   (b) En déduire que la série $\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} x^n$ converge pour tout $x \in ]-1, 1[$.

   Par la suite, on note $f_k(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n$.

   (c) En utilisant la formule du triangle de Pascal, montrer que, pour tout $x \in ]-1, 1[$ :

$$f_{k+1}(x) = x f_k(x) + x f_{k+1}(x).$$

   (d) En déduire l'expression de $f_k(x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in ]-1, 1[$.

(2) Soit $p \in ]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$, et on effectue une série de lancers d'une pièce truquée qui donne "pile" avec la probabilité $p$ et "face" avec la probabilité $q$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité de ne jamais obtenir $k$ piles (*indication : pour tout $n \geq k$, on s'intéressera à l'événement $A_n$ : "on obtient $k$ piles au bout de $n$ lancers exactement"*).