TRAVAUX DIRIGÉS : VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES (RÉPONSES - INDICATIONS)

Exercice 1. On trouve que : $x = \dfrac{13}{2}$.

Exercice 2. La mise minimale est de $0,995 \simeq 1$ euro.

Exercice 3.

(1) $a = 18$.
(2) $a = 6$.

Exercice 4.

(1) On trouve que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$: $F_M(k) = \dfrac{k^2}{n^2}$.
(2) On trouve que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$: $P(M = k) = \dfrac{2k-1}{n^2}$. De plus : $E(M) = \dfrac{(n+1)(4n-1)}{6n}$.

Exercice 5. Utiliser l'existence de l'espérance par domination!

Exercice 6.

(1) $X_1 + X_2 = n$ et $X = X_1 - X_2$.
(2) $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n, q)$ avec $q = 1 - p$. De plus, on a :

$$X(\Omega) = \{-n, -n+2, ..., n-2, n\} \quad \text{et} \quad \forall k \in X(\Omega),\ P(X = k) = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}}.$$

Par ailleurs, on trouve que : $E(X) = n(p - q) = n(2p - 1)$.
(3) On a : $V(X) = 4npq$.

Exercice 7.

(1) La proba que la greffe ait pris sur un rosier donné au bout des N semaines vaut $1 - q^N$, avec $q = 1 - p$.
(2) On trouve que $X_N \hookrightarrow \mathcal{B}(R, 1 - q^N)$, $E(X_N) = R(1 - q^N)$ et $V(X_N) = Rq^N(1 - q^N)$.
(3) A faire!

Exercice 8. On trouve que $E(Y) = \dfrac{1 - (1-p)^{n+1}}{p(n+1)}$.

Exercice 9.

(1) On trouve que : $a = \ln(8 - 2e)$.
(2) (a) $E(X) = \dfrac{e}{4} + \dfrac{ae^a}{8}$.
(b) $E(X(X-1)) = \dfrac{e}{4} + \dfrac{a^2e^a}{8}$ et $V(X) = \dfrac{e}{2} + \dfrac{a^2e^a}{8} + \dfrac{ae^a}{8} - \left(\dfrac{e}{4} + \dfrac{ae^a}{8}\right)^2$.

Exercice 10. Non! Trouver a en calculant $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)$. Constater que $a < 0$ et conclure.

Exercice 11. Y admet une espérance si et seuelement si $0 < \lambda < 1$ et dans ce cas, on a : $E(Y) = \dfrac{1}{1-\lambda}$.

Exercice 12.

(1) $P([X = 1]) = e^{-4}$ et $P(X = k) = \dfrac{4^{k-1}e^{-4}}{(k-1)!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
(2) $E(X) = 5$ et $V(X) = 4$.

Exercice 13.

(1) A démontrer par récurrence ou par réarrangement des sommes.
(2) Conclure à l'aide de la question (1).
(3) (a) $E(X) = \sum_{k=0}^{N-1} \left[1 - \left(\frac{k}{n}\right)^n\right]$ et pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, on a : $P(X = k) = \left(\frac{k}{n}\right)^n - \left(\frac{k-1}{n}\right)^n$.
(b) A l'aide des sommes de Riemann, on trouve que : $E(X) \underset{N \to +\infty}{\sim} \frac{nN}{n+1}$.

Exercice 14.
(1) La proba qu'il y ait un vainqueur au cours d'une partie vaut $\frac{n}{2^{n-1}}$.
(2) $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{n}{2^{n-1}}\right)$, $E(X) = \frac{2^{n-1}}{n}$ et $V(X) = \frac{1 - \frac{n}{2^{n-1}}}{\left(\frac{n}{2^{n-1}}\right)^2}$.

Exercice 15.
(1) La proba qu'une cage au moins reste vide vaut $3\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3^n}\right]$.
(2) $E(X) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Exercice 16.
(1) $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1-x)$, $E(S_n) = n(1-x)$ et $V(S_n) = nx(1-x)$.
(2) (a) Utiliser la question (1) et écrire que : $P([T_n = n+k]) = P([S_{n+k-1} = k-1] \cap P_{n+k})$.
(b) Utiliser la formule du binôme négatif.
(c) $E(T_n) = \frac{n}{1-x}$.
(d) $E(T_n(T_n+1)) = \frac{n(n+1)}{(1-x)^2}$ et $V(T_n) = \frac{nx}{(1-x)^2}$.
(3) (a) $G_1 = \lambda a^{T_1} - \sum_{k=0}^{T_1} a^k = \lambda a^{T_1} - a\left(\frac{a^{T_1}-1}{a-1}\right)$.
(b) $E(G_1) = \frac{a}{a-1} + \left(\lambda - \frac{a}{a-1}\right)\left[\frac{a(1-x)}{1-a(1-x)}\right]$.
(c) $G_2 = \lambda a^{T_1} + \lambda a^{T_2} - a\left(\frac{a^{T_2}-1}{a-1}\right)$.

Exercice 17.
(1) Calculer $V(X)$, utiliser le fait que $V(X) \geq 0$ et conclure.
(2) Ecrire que $E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X=k)$, $E(X^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 P(X=k)$ et partir du fait que $E(X) = E(X^2)$.

Exercice 18.
(1) On trouve que $P([X = n]) = \frac{n}{(n+1)!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(2) On obtient après calculs que $E(X) = e - 1$ et $V(X) = 3e - e^2$.

1. Exercices supplémentaires

Exercice 19.
(1) $Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}$, $P(Y=0) = \frac{5}{6}$, $P(Y=1) = \frac{1}{15}$, $P(Y=2) = \frac{1}{10}$, $E(Y) = \frac{4}{15}$, $V(Y) = \frac{89}{225}$.
(2) La proba que le résultat du dé soit pair sachant qu'on a obtenu 2 boules blanches vaut 1.

Exercice 20.
(1) $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(3, \frac{1}{6}\right)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{2}{27}\right)$.
(2) $n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(2/27)} \simeq 1,7694$, soit : $n \geq 2$.

Exercice 21.

(1) $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $P(X = k) = \dfrac{k}{(k+1)!} = \dfrac{1}{k!} - \dfrac{1}{(k+1)!}$.

Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P([X = k])$ par télescopage.

(2) On trouve que : $E(X) = e - 1$.

Exercice 22.

(1) Utiliser la formule des probas composées et effectuer un télescopage dans le produit.

(2) $E(X) = \dfrac{n+3}{3}$ et $V(X) = \dfrac{n(n+3)}{18}$.

(3) $\forall i \in [\![2, n+2]\!]$, $P(Y = i) = \dfrac{2(i-1)}{(n+1)(n+2)}$.

Exercice 23.

(1) $P([Y = k]) = \dfrac{6}{3^k}$ pour tout $k \geq 2$.

(2) $P_{[Y=k]}([Z = l]) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{l-k-1}$ pour tout $k \geq 2$, pour tout $l \geq 3$ tels que $l > k$.

(3) Utiliser les questions précédentes et la formule des probas totales.

(4) $P([Z = l]) = 0$ si $l \leq 2$.

(5) $E(Z) = \dfrac{11}{2}$ et $V(Z) = \dfrac{27}{4}$.

Exercice 24.

(1) (a) $G_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$, $P(G_n = 0) = q^n$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a : $P(G_n = k) = pq^{k-1}$.

(b) Par définition, on sait que :

$$E(G_n) = \sum_{k=1}^{n} kP(G_n = k) = \sum_{k=1}^{n} kq^{k-1}p.$$

Remarquer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k = x\frac{x^n - 1}{x - 1}$ $(*)$ pour tout $x \neq 1$. Dériver ensuite l'expression $(*)$ pour obtenir une formule pour $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ et conclure.

(2) (a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} E(G_n) = \frac{1}{p}$.

(b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P([G_n = k]) = pq^{k-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

(3) (a) On trouve que :

$$B_n = \begin{cases} 5 - k & \text{si} \quad G_n = k \neq 0 \\ \\ -15 & \text{si} \quad G_n = 0 \end{cases}.$$

Ecrire alors que $B_n = (5 - G_n)\mathbb{1}_{[G_n \neq 0]} - 15\mathbb{1}_{[G_n = 0]}$, et en déduire que :

$$E(B_n) = 5 - E(G_n) - 20P(G_n = 0) = 5 - \left[\frac{1 - q^n(1 + np)}{p}\right] - 20q^n.$$

(b) Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = 5 - \left[\frac{1 - q^x(1 + xp)}{p}\right] - 20q^x.$$

Alors, on trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = q^x\left[x\ln(q) + 1 + \frac{\ln(q)}{p} - 20\ln(q)\right].$$

En particulier, on voit que $g'(x) \leq 0$ si et seulement si $x \geq x_0 = -\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{\ln(1-p)} + 20$. Donc g est croissante avant x_0, décroissante après x_0 et admet un maximum en x_0. Or, avec l'inégalité rappelée, on a : $19 < x_0 < 19,5$. On maximise alors le gain en prenant $n = 19$.

Exercice 25.

(1) (a) $\sum p_n$ converge et sa somme vaut 1. Donc $\sum p_n t^n$ converge par comparaison.
(b) Par définition, on trouve que $E(X) = G'_X(1)$.

(2) (a) Si $Z \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, on trouve que : $G_X(t) = \dfrac{pt}{1-qt}$.
(b) Dériver $G_Z(t)$ et calculer $G'_Z(1)$. Conclure avec la question (1)(*b*). On trouve que : $E(Z) = \dfrac{1}{p}$.
(c) A l'aide du résultat admis, on trouve que :

$$S_r(qx) = \frac{G_Z^{(r)}(x)}{r!}.$$

Comme $G_Z(x) = -\dfrac{p}{q} + \dfrac{p}{q(1-qx)}$, on peut montrer par des dérivations successives que :

$$S_r(x) = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}.$$

(3) (a) Montrer tout d'abord que, pour tous $n, k \geq 1$:

$$P([R=n] \cap [L=k]) = p^{k+1}q^n + p^n q^{k+1}.$$

En utilisant la formule des probas totales, on obtient que, pour tout $n \geq 1$:

$$P(R=n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P([R=n] \cap [L=k]) = ... = p^2 q^{n-1} + q^2 p^{n-1}.$$

(b) On trouve que, pour tout $t \in [0,1]$:

$$G_R(t) = \frac{p^2 t}{1-qt} + \frac{q^2 t}{1-pt}.$$

Calculer $G'_R(1)$ et en déduire que $E(R) = 2$.
(c) On peut retrouver ce résultat en utilisant les séries géométriques dérivées et la linéarité de $\sum$.

Exercice 26.

(1) Cf. cours!
(2) La quantité θ_n représente la probabilité que le matériel tombe en panne, alors que ce dernier est encore en état de marche à cet instant!
(3) On trouve que $\theta_n = p$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le taux de panne est donc constant!
(4) (a) Après calculs, on trouve que $\lambda = 1$.
(b) On trouve que $\theta_0 = 0$ et $\theta_n = \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \geq 1$. On remarque que, dans ce cas, le taux de panne est décroissant. Cela correspond à un matériel qui a de moins en moins de chances de tomber en panne avec le temps.
(5) (a) Par construction, on voit que $\theta_n \in [0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En utilisant le fait que $P(T > n) > 0$ par hypothèse, montrer que $\theta_n < 1$ et conclure.
(b) Vérifier que $\dfrac{P(T \geq k)}{P(T \geq k+1)} = 1 - \theta_k$ pour tout $k \geq 1$, et en déduire que :

$$P(T \geq n) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \theta_k).$$

(c) D'après la propriété de limite monotone, on voit que $P(T \geq n)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. En composant avec ln, on obtient que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1-\theta_k) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

On en déduit que la série $\sum \ln(1-\theta_n)$ diverge, puis que la série $\sum \theta_n$ diverge, en distinguant les cas "(θ_n) converge vers 0" et "(θ_n) ne converge pas vers 0".
(6) En procédant par Analyse-Synthèse. L'analyse permet de voir que, si une telle variable aléatoire T existe, alors on a $P(T=0) = \theta_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(T=n) = \theta_n \prod_{k=0}^{n-1} (1-\theta_k).$$

Pour la synthèse, on considère alors la suite $(p_n)_{n \geq 0}$ définie par $p_0 = \theta_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$p_n = \theta_n \prod_{k=0}^{n-1} (1-\theta_k).$$

A noter que tous les p_i sont ≥ 0. On montre ensuite que la série $\sum_{i\geq 0} p_i$ converge, de somme 1. Pour cela, on peut vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = 1 - \prod_{k=0}^{n}(1-\theta_k).$$

Ensuite, on utilise le fait que la série $\sum \theta_n$ diverge pour établir que le produit de droite ci-dessus tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et donc la série $\sum_{i\geq 0} p_i$ converge bien, de somme 1. En particulier, il existe une variable aléatoire T dont la loi est donnée par la suite $(p_k)_{k\geq 0}$. Reste à vérifier que $(\theta_n)_{n\geq 0}$ est bien le taux de panne de T!